Stabilité forte du fibré tangent pour des variétés lisses de type Fano

Julien Keller

Laboratoire E.Picard, Université Paul Sabatier - Toulouse III

Email : keller@picard.ups-tlse.fr

May 22, 2002

1 Introduction

Soit M une variété Kählérienne compacte de dimension complexe n et soit H un fibré en droites ample sur M. Pour tout faisceau $\mathcal{F}$ cohérent sans torsion sur M, nous notons $\deg(\mathcal{F})$ le degré de $\mathcal{F}$ par rapport à H, c'est à dire le degré du fibré déterminant de $\mathcal{F}$

$$\deg(\mathcal{F}) = \deg(\wedge^r \mathcal{F}) = \left(c_1(\mathcal{F}) \cdot H^{n-1}\right)$$

et

$$\mu_H(\mathcal{F}) = \frac{\deg(\mathcal{F})}{rang(\mathcal{F})}$$

le degré normalisé de $\mathcal{F}$ par rapport à H. Rappelons que dans le cadre des variétés Kählériennes, nous disposons de la notion de stabilité au sens de Mumford-Takemoto : $\mathcal{F}$ est dit H-stable (resp. H-semistable) si pour tout sous-faisceau $\mathcal{F}'$ de $\mathcal{F}$ avec $0 < rang(\mathcal{F}') < rang(\mathcal{F})$, on a $\mu_H(\mathcal{F}') < \mu_H(\mathcal{F})$ (resp. $\mu_H(\mathcal{F}') \leq \mu_H(\mathcal{F})$).

Nous allons tout d'abord généraliser la notion de stabilité de Mumford-Takemoto. Soit maintenant deux faisceaux cohérents $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ sur M. Une extension de $\mathcal{F}_1$ par $\mathcal{F}_2$ est la donnée d'un faisceau cohérent $\mathcal{F}_3$ avec la suite exacte courte suivante :

$$0 \to \mathcal{F}_2 \to \mathcal{F}_3 \to \mathcal{F}_1 \to 0$$

Définition 1.0.1 *Une paire $(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$ de faisceaux cohérents est dit H-stable (resp. H-semistable) si l'extension générique $\mathcal{F}_3$ de $\mathcal{F}_1$ par $\mathcal{F}_2$ est H-stable (resp. H-semistable) au sens de Mumford-Takemoto. Un faisceau cohérent sans torsion $\mathcal{F}$ est fortement H-stable (resp. fortement H-semistable) si $\mathcal{F}$ et la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{O}_M)$ sont tous deux H-stables (resp. H-semistables), où $\mathcal{O}_M$ est le faisceau structural de M.*

Les propriétés de tels fibrés sont étudiées dans [T2]. De plus, F. Bogomolov a introduit une autre notion de stabilité :

Définition 1.0.2 *Soit un réel* $0 < \lambda \leq 1$. *Un faisceau sans torsion* $\mathcal{F}$ *est dit* λ*-stable si pour tout sous-faisceau* $\mathcal{F}'$ *avec* $0 < rang(\mathcal{F}') < rang(\mathcal{F})$, *l'on a l'inégalité*

$$\mu_H(\mathcal{F}') < \lambda \mu_H(\mathcal{F})$$

Proposition 1.1 *Les propriétés suivantes sont vraies :*
(1) Une petite déformation d'un fibré λ*-stable est encore* λ*-stable*
(2) Si E *est* $\frac{n}{n+1}$*-stable, alors* E *est fortement stable.*

Dans la section suivante, nous étudierons $M \subset \mathbb{CP}^n$ (pour $n \geq 3$) une hypersurface lisse de degré $d \geq 3$, la stabilité sera considérée par rapport au fibré ample naturel $\mathcal{O}_M(1)$ et l'on posera $\mu(\mathcal{F}) = \mu_{\mathcal{O}_M(1)}(\mathcal{F})$.

Nous cherchons maintenant à prouver de manière élémentaire que dans ces conditions, le fibré tangent complexe TM de M est fortement stable. En particulier, nous savons par [T2, Théorème 2.1] que pour toute variété X Kähler-Einstein avec $Pic(X) = \mathbb{Z}$ et avec algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes $\eta(X)$ triviale, le fibré TX est $\frac{n}{n+1}$-stable. Or pour $d > n$, M est une variété Kähler-Einstein (puisque $c_1(M) = 0$ ou $c_1(M) < 0$) avec $\eta(M) = \{0\}$ et $Pic(M) = \mathbb{Z}$ ([Ha1],[M-F-K]). Nous nous restreignons donc au cas où $3 \leq d \leq n$, c'est à dire au cas où le fibré anticanonique est ample, ce qui, par définition, signifie que M est une variété de type Fano.

Remarque 1 *Il existe différentes notions de stabilité [H-L]. En particulier, une conséquence de notre travail est que le fibré* TM *est stable au sens de Gieseker.*

Remarque 2 *Dans le cas* $d \geq \frac{n+1}{2}$, *T. Aubin conjecture qu'il existe une métrique Kähler-Einstein sur toute hypersurface lisse de* $\mathbb{CP}^n$ *de degré d (Voir [A]).*

Ainsi le but de cette note est le

Théorème 1 *Toute hypersurface lisse de* $\mathbb{CP}^n$ *de degré* $d > 2$ *a son fibré tangent fortement stable.*

2 Preuve du théorème

Soit $\mathcal{F}$ un sous-faisceau de $\mathcal{E} = \mathcal{O}(TM)$ cohérent de rang $r < rang(TM)$ tel que $\mathcal{E}/\mathcal{F}$ est sans torsion. L'inclusion $j : \mathcal{F} \to \mathcal{E}$ induit un homomorphisme injectif $det(j)$ ($\mathcal{F}$ est un sous fibré de $\mathcal{E}$ sur un ouvert Zariski de M)

$$det(j) : det(\mathcal{F}) = (\wedge^r \mathcal{F})^{**} \to (\wedge^r \mathcal{E})^{**} = (\wedge^r \mathcal{E})$$

dont le noyau est un faisceau de torsion. En tensorisant avec l'endomorphisme identité de $(det\mathcal{F})^*$, nous obtenons un homomorphisme non trivial qui peut-être vu comme une section holomorphe non trivale du fibré $\wedge^r TM \otimes det(\mathcal{F})^*$:

$$s : \mathcal{O}_M \to \wedge^r TM \otimes det(\mathcal{F})^*$$

Mais, puisque $dim(M) \geq 3$, $Pic(M) = \mathbb{Z}$ par [Ha1], et en vue de la proposition 1.1 (2), il nous suffit de prouver que

$$H^0(M, \wedge^r TM \otimes det(\mathcal{F})^*) = H^0(M, \wedge^r TM \otimes \mathcal{O}_M(-f)) = 0$$

pour tout $(r,f)\in I$ où l'on a défini l'ensemble

$$I=\left\{(r,f)\in\mathbb{N}^2 | 1\leq r\leq n-2 \ et \ \frac{f}{r}\geq\frac{c_1(TM)\cdot\left(c_1\left(\mathcal{O}_M(1)\right)\right)^{n-2}}{n}\right\}$$

ce qui permettra de conclure par [Ko, p:52-54] que $\mu(\mathcal{F})<\frac{n-1}{n}\mu(\mathcal{E})$.
Nous pouvons appliquer la dualité de Serre puisque nous connaissons le fibré canonique de M, $K_M=\mathcal{O}(n+1-d)$ ([Ha1]), et nous sommes ramenés à prouver par conséquent que

$$H^{n-1}\left(M,\Omega_M^r\otimes\mathcal{O}_M(f)\otimes K_M\right)=H^{n-1}\left(M,\Omega_M^r\otimes\mathcal{O}_M(f+d-n-1)\right)=0 \tag{1}$$

pour $1\leq r\leq n-2$ et $f\geq r\frac{n+1-d}{n}$. Notons désormais

$$f_r=\begin{cases} r\frac{n+1-d}{n} \text{ si } r\frac{n+1-d}{n}\in\mathbb{N}\\ \left[r\frac{n+1-d}{n}\right]+1 \text{ sinon}\end{cases}$$

et remarquons que l'on a toujours $f_r\geq 1$.

Proposition 2.1 *Dans les conditions précédentes, nous avons*

$$H^{n-1}\left(M,\Omega_M^r\otimes\mathcal{O}_M(f_r+d-n-1)\right)=0$$

Preuve. En effet, la suite exacte courte du fibré normal sur M s'écrit,

$$0\to T_M\to T_{\mathbb{CP}^n}|_M\to\mathcal{O}_M(d)\to 0$$

soit encore dualement,

$$0\to\mathcal{O}_M(-d)\to\Omega^1_{\mathbb{CP}^n}|_M\to\Omega^1_M\to 0$$

et donc

$$0\to\Omega^r_M(-d)\to\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}|_M\to\Omega^{r+1}_M\to 0$$

et

$$0\to\Omega^r_M(f_r+d-n-1)\to\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M\to\Omega^{r+1}_M(f_r+2d-n-1)\to 0$$

ce qui donne au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned}\cdots\to H^{n-2}\left(M,\Omega^{r+1}_M(f_r+2d-n-1)\right)\to H^{n-1}\left(\Omega^r_M\left(f_r+d-n-1\right)\right)\\ \to H^{n-1}\left(M,\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M\right)\to H^{n-1}\left(M,\Omega^{r+1}_M(f_r+2d-n-1)\right)\to\cdots\end{aligned} \tag{2}$$

Supposons dans un premier temps que $d\geq\frac{n+1}{2}$. Alors, $f_r+2d-n-1>0$ et on peut appliquer le théorème d'annulation de Nakano [Ko, p:74] puisque $r\geq 1$:

$$\begin{aligned} H^{n-2}\left(M,\Omega^{r+1}(f_r+2d-n-1)\right)&=0\\ H^{n-1}\left(M,\Omega^{r+1}(f_r+2d-n-1)\right)&=0\end{aligned}$$

On est donc ramené à démontrer d'après la suite cohomologique ci-dessus que $H^{n-1}\left(M,\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M\right)=0$.

Maintenant, considérons la suite exacte naturelle, donnée par "multiplication par F" où F est la forme de degré d définissant la variété M,

$$0 \to \Omega^1_{\mathbb{CP}^n}(-d) \to \Omega^1_{\mathbb{CP}^n} \to \Omega^1_{\mathbb{CP}^n}|_M \to 0$$

ce qui donne

$$0 \to \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+d-n-1) \to \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1) \to \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M \to 0$$

et au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{n-1}\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)\right) \to H^{n-1}\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M\right) \\ \to H^n\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+d-n-1)\right) \to \cdots \qquad (3) \end{aligned}$$

On peut alors appliquer le théorème d'annulation de Bott [Ko, p:78]

$$H^q\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^p_{\mathbb{CP}^n}(k)\right) = 0 \text{ pour } p, q \geq 0 \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ sauf pour } \begin{cases} p = q, & k = 0 \\ q = 0, & k > p \\ q = n, & k < p - n \end{cases}$$

et si $H^n\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+d-n-1)\right) \neq 0$ alors $2-d > f_r - r$ puis il vient $(d-2) < r\frac{(d-1)}{n}$, ce qui est absurde puisque $d > 2$ et $r < n-1$ (ici une étude du cas critique $d = \frac{n+1}{2}$ s'impose avec l'utilisation du fait que $f_r \in \mathbb{N}^*$). Avec toujours $f_r+2d-n-1 > 0$ on obtient que $H^{n-1}\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)\right) = 0$ et ainsi $H^{n-1}\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+2d-n-1)|_M\right) = 0$. Dès lors la proposition 2.1 est prouvée pour $d \geq \frac{n+1}{2}$. Un calcul simple montre également que dans le cas $2 < d < \frac{n+1}{2}$, et $n-3 \leq r \leq n-2$, l'on a encore $f_r+2d-n-1 > 0$ donc le même raisonnement peut-être appliqué dans ce cas particulier ainsi qu'à tous les triplets (d, r, n) tels que $f_r + 2d - n - 1 > 0$.

Reste à prouver que la proposition 2.1 est encore vraie dans les autres cas, c'est à dire $(2 < d < \frac{n+1}{2},\ r < n-3)$. Soit $p > 3$ le plus petit entier tel que l'on ait l'inégalité $f_r + pd - n - 1 > 0$. Le théorème d'annulation de Nakano donne cette fois-ci que les espaces $H^{n-1}\left(\Omega^r_M(f_r+(p-1)d-n-1)\right)$ et $H^{n-1}\left(M, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+pd-n-1)|_M\right)$ sont isomorphes et on peut encore appliquer le théorème d'annulation de Bott puisque

$$r + 1 - (p-1)d - f_r + n + 1 > n$$

conduit à une absurdité vu que $p > 2$, $d > 2$ et $r < n-1$. Ainsi,

$$H^{n-1}\left(\Omega^r_M(f_r+(p-1)d-n-1)\right) = 0$$

La suite cohomologique (3) peut-être réécrite en

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{n-1}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+(p-1)d-n-1)\right) \to H^{n-1}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+(p-1)d-n-1)|_M\right) \\ \to H^n\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+(p-2)d-n-1)\right) \to \cdots \qquad (4) \end{aligned}$$

et comme $r \neq n-2$, le théorème d'annulation de Bott prouve que l'on a $H^{n-1}\left(\mathbb{CP}^n, \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r+(p-1)d-n-1)|_M\right) = 0$. Avec la suite (2), nous obtenons donc la nouvelle suite cohomologique :

$$\begin{aligned} \cdots \to H^{n-2}\left(M, \Omega^{r+1}_M(f_r+(p-1)d-n-1)\right) \to \qquad (5) \\ H^{n-1}\left(M, \Omega^r_M(f_r+(p-2)d-n-1)\right) \to 0 \end{aligned}$$

Montrons maintenant que $H^{n-2}\left(M, \Omega_M^{r+1}(f_r + (p-1)d - n - 1)\right) = 0$. Nous disposons de la suite exacte suivante donnée par multiplication par F :

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n}(-d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{CP}^n} \to \mathcal{O}_M \to 0$$

et donc

$$0 \to \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(-d) \to \Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n} \to \Omega^{r+1}_M \to 0$$

et au niveau de la cohomologie :

$$\begin{aligned} \cdots \to\ & H^{n-2}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r + (p-1)d - n - 1)\right) \to H^{n-2}\left(\Omega^{r+1}_M(f_r + (p-1)d - n - 1)\right) \\ \to\ & H^{n-1}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r + (p-2)d - n - 1)\right) \to \cdots \end{aligned}$$

Comme $r \neq n-3$, $H^{n-2}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r + (p-1)d - n - 1)\right) = 0$, et l'on a également $H^{n-1}\left(\Omega^{r+1}_{\mathbb{CP}^n}(f_r + (p-2)d - n - 1)\right) = 0$ car $r \neq n-2$ et en appliquant une nouvelle fois le théorème de Bott. Ainsi, la suite (5) prouve que

$$H^{n-1}\left(M, \Omega^r_M(f_r + (p-2)d - n - 1)\right) = 0$$

et en itérant ce processus k fois jusqu'à ce que $(p-k-1) = 1$ (les hypothèses des théorèmes d'annulations sont vérifiées à chaque étape), on prouve ainsi que $H^{n-1}\left(M, \Omega^r_M(f_r + d - n - 1)\right) = 0$. ∎

Par ailleurs la proposition 2.1 suffit à prouver l'annulation des espaces

$$H^{n-1}(M, \Omega^r_M \otimes \mathcal{O}_M(f) \otimes K_M)$$

de (1) pour $1 \leq r \leq n-2$ et $f \geq r\frac{n+1-d}{n}$. En effet, si nous fixons D une section hyperplane de M, $\Omega^r(m)$ peut être identifié avec le faisceau des p-formes à valeurs dans $\mathcal{O}_M(m+1)$ avec pôle d'ordre 1 sur D. Ainsi, nous obtenons la suite exacte

$$0 \to \Omega^p_M(m) \to \Omega^p_M(m+1) \xrightarrow{R} \Omega^{p-1}_D(m) \to 0 \tag{6}$$

en définissant R de la manière suivante : si localement $\{g = 0\}$ définit D et $\phi \in \Omega^p_M(m+1)$ s'écrit $\phi = \frac{1}{g}(dg \wedge \eta + \alpha)$ où α ne fait pas intervenir le terme dg, alors on pose $R(\phi) = \pi^*\eta$ où $\pi : D \hookrightarrow M$ est le plongement canonique. Dès lors, par (6), on voit que $\forall f \geq f_r$, $H^{n-1}\left(\Omega^r_M(f_r + d - n - 1)\right) = 0$ infère $H^{n-1}\left(\Omega^r_M(f + d - n - 1)\right) = 0$ et le théorème est prouvé.

Corollaire 2.1 *Les hypersurfaces lisses de $\mathbb{CP}^n$ de degré supérieur ou égal à 3, qui sont exactement toutes les hypersurfaces Hilbert-Mumford stables (orbite fermée sous l'action naturelle de $SL(n+1, \mathbb{C})$ et stabilisateur fini, [M-F-K, p:79]) ont leur fibré tangent fortement stable.*

Remarque 3 *Le résultat reste vrai sur tout corps de caractéristique nulle de par le résultat de P. Deligne [D].*

Remarque 4 *La première suite exacte peut être réutilisée pour prouver de manière similaire que le fibré cotangent est aussi fortement stable.*

Remarque 5 *Le théorème se généralise bien entendu au cadre des intersections complètes. En particulier, ceci est intéressant si la conjecture de R. Hartshorne est vraie : toute variété complexe projective $M \subset \mathbb{CP}^n$ de dimension m, lisse et connexe, est une intersection complète si $m > \frac{2}{3}n$ [Ha2].*

3 Forte stabilité pour les variétés del Pezzo

En dimension 2, les variétés Fano ont été classifiées. Il s'agit des variétés Del Pezzo, c'est à dire de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^2$ et des éclatés de $\mathbb{CP}^2$ en k points (en position générique) pour $1 \leq k \leq 8$. Dans [T2], G. Tian prouve que pour $\mathbb{CP}^2$ éclaté en un point, le fibré tangent n'est pas fortement semi-stable. Une question naturelle est de s'interesser à la forte stabilité du fibré tangent de $S_k = \mathbb{CP}^2 \# k\overline{\mathbb{CP}^2}$ pour $2 \leq k \leq 8$, ce qui n'est pas évident puisque [T2, Théorème 2.1] ne s'applique pas. Nous prouvons maintenant une généralisation de [F, Théorème §3]:

Théorème 2 *Les surfaces del Pezzo $(S_k)_{k=2..8}$ ont leurs fibrés tangents fortement stables.*

Preuve. La surface S_k est l'éclatée des points $(p_i)_{i=1..k}$ de $\mathbb{CP}^2$ auxquels sont associés les droites exceptionnelles $(E_i)_{i=1..k}$. On désigne par E_0 l'image réciproque d'une droite de $\mathbb{CP}^2$ et par e_i la classe du diviseur E_i pour $i = 0,..,k$ dans $Pic\,(S_k)$. Le groupe $Pic(S_k)$ est engendré par $(e_i)_{i=0..k}$ et la forme d'intersection est donnée par (Cf [Ha1])

$$\begin{aligned} \langle e_0, e_0 \rangle &= 1, \quad \langle e_i, e_i \rangle = -1 \text{ si } i = 1,..,k \\ \langle e_i, e_j \rangle &= 0 \text{ pour } i \neq j \end{aligned}$$

La classe dans $Pic(S_k)$ du diviseur canonique K de S_k est $-3e_0 + \sum_{i=1}^k e_i$. Considérons la stabilité relativement à la polarisation donnée par $-K$. En vue de la proposition 1.1 et de [F, lemme 1], il s'agit de prouver que pour tout sous-faisceau $L = \mathcal{O}\left(-rE_0 + \sum_{i=1}^k a_i E_i\right)$ saturé de TS_k $(r > 2)$, nous avons

$$(-K \cdot L) < \frac{1}{3}(-K \cdot K) \tag{7}$$

Toujours par [F, lemme 1], il existe un diviseur effectif C tel que

$$C = (r-1)E_0 - (a_1+1)E_1 - \sum_{i=2}^k (a_i - 1)E_2$$

Notons $d = (-K \cdot C) = 3r - \sum a_i + k - 5$ et bien sûr $d > 0$ puisque $-K$ est ample. Or l'inégalité (7) se réécrit par un simple calcul sous la condition

$$3\sum_{i=1}^k a_i < 9r + k - 9$$

c'est à dire

$$3d > 2k - 6$$

▷ Pour $k = 2, 3$ le résultat est immédiat.
▷ Pour $k = 4, 5, 6$ il suffit d'étudier le cas $d \leq 2$. Comme $C \cdot E_1 \leq 2$, l'on obtient $a_1 \leq 1$ et par symétrie, on peut supposer $a_i \leq 1$. Si $k > 2$, cela donne une contradiction : $d \geq 4$.
▷ Pour $k = 7$, l'on suppose $d \leq 3$. L saturé donne $c_2\left(TS_7 \otimes L^{-1}\right) \geq 0$, soit

$$\sum_{i=1}^k \left(a_i - a_i^2\right) + r^2 - 3r + 10 > 0$$

et en majorant $\sum a_i^2$ par $\frac{1}{k}\left(\sum a_i\right)^2$,

$$(3r-d+2)^2 \leq 7\left(r^2-d+12\right) \tag{8}$$

La surface S_6 admet un diviseur effectif : $(r-1)\,E_0-(a_1+1)\,E_1-\sum_{i=2}^{6}(a_i-1)\,E_i$, et son image par le plongement ϕ_{-K} est de degré $d+a_7-1$. Prenant l'intersection avec E_1, on obtient

$$a_1+1 \leq d+a_7-1$$

Si $d=1$, on en déduit $a_1<a_7$ ce qui est impossible vu le rôle symétrique des a_i. Si $d=2$, les a_i sont tous égaux et $3r=7a_i$ donc $r\geq 7$ ce qui contredit (8).
$\triangleright$ Pour $k=8$, on se ramène a étudier le cas $d\leq 3$ et $r\geq 3$. En numérotant les points p_i de sorte que $a_1\geq a_i$ pour tout i, on obtient que $a_1\geq 2$. Soit le diviseur $D=6E_0-3E_1-2\sum_{i=2}^{8}E_i$. Remarquons que $D\cdot D=D\cdot K=-1$. Par conséquent D est linéairement équivalent à une courbe exceptionnelle C ([Ha1]) et l'on dipose de la suite exacte

$$0\to O_{S_8}(-C)|_C\to T_{S_8}|_C\to K_C\to 0$$

En tensorisant par L^{-1}, on obtient

$$0\to L^{-1}(-C)\,|_C\to T_{S_8}\otimes L^{-1}|_C\to K_C\otimes L^{-1}|_C\to 0 \tag{9}$$

On calcule

$$\deg_C\left(L^{-1}(-C)\,|_C\right)=2d-a_1-5<0$$

et

$$\deg\left(K_C\otimes L^{-1}|_C\right)=2d-a_1-8<0$$

Par conséquent, la suite cohomologique associée à (9) donne

$$H^0\left(C,T_{S_8}\otimes L^{-1}|_C\right)=0$$

Ainsi, toute section globale de $T_{S_8}\otimes L^{-1}|_C$ s'annule sur C, ce qui contredit le fait que L est saturé. ∎

Remarque 6 *A l'inverse de $\mathbb{CP}^1\times\mathbb{CP}^1$, $\mathbb{CP}^2$ a son fibré stable fortement stable. Avec le théorème, on obtient donc la classification des variétés Fano de dimension 2 à fibré tangent fortement stable.*

Conjecture 1 *Il existe une variété X Fano de dimension 3, avec $Pic(X)=\mathbb{Z}$ et fibré tangent Mumford stable mais non fortement stable.*

References

[A] Aubin, T. *Réduction du cas positif de l'equation de Monge-Ampère sur les variétés Kähleriennes compactes à la démonstration d'une inégalité,* Journ. Funct. Analysis, 57(2):143-153 (1984).

[D] Deligne, P. *Groupes de Monodromie en Géométrie algébrique, (SGA 7 II)*, Lect. Notes in Math, 340 (1973).

[F] Fahlaoui,R. *Stabilité du fibré tangent des surfaces del Pezzo*, Math. Ann, 283(1):171-176 (1989).

[Ha1] Hartshorne, R. *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, (1977).

[Ha2] Hartshorne, R. *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. Amer. Soc., 80:1017-1032 (1974).

[H-L] Huybrechts, D. & Lehn, M. *The Geometry of moduli of sheaves*, Pub. of Max-Planck-Institut Bonn, (1997).

[Ho] Hoppe, H. J., *Generic decomposition type and second Chern class of stable rank 4 vector bundles on* $\mathbb{P}^4$, Math.Z, 187(3):345-360 (1984).

[K-S] Katz, N. & Sarnak, P. *Random matrices, Frobenius eigenvalues and Monodromy,* Colloquium Pub. Amer. Math. Society, Vol 45 (1999).

[Ko] Kobayashi, S. *Differential Geometry of complex vector bundles*, Princeton Univ. Press, (1987).

[M-F-K] Mumford, D. & Fogarty, J. & Kirwan. F, *Geometric Invariant Theory*, 3rd Edition, Springer-Verlag, (1994).

[T1] Tian, G. *Kähler-Einstein metrics on Algebraic manifolds*, Lect. Notes in Mathematics, Springer, 1646 (1996).

[T2] Tian, G. *On stability of the tangent bundles of Fano varieties*, Int. Journ. Math, 3(3):401-413 (1992).