Mémoire de D.E.A.

Master Report

Théorie de Jauge en dimension supérieure

Julien Keller
Sous la direction de P. Eyssidieux

Juin 2001

L'objet de ce mémoire est de présenter les résultats du travail de G. Tian, qui sous l'impulsion des nouvelles idées de S.K Donaldson et P. Thomas [7], a commencé à élaborer une nouvelle théorie de Jauge pour les variétés de dimension supérieure à 4. Même si nous n'aborderons pas cet aspect, la principale motivation sous-jacente à ces nouvelles idées est bien sûr de nature topologique puisqu'il s'agit d'étendre les invariants de Donaldson relatifs à l'espace de modules des solutions des équations de Yang-Mills anti-auto-duales. Comme on le sait en dimension 4, l'utilisation de tels invariants s'avère être un domaine d'investigation fort riche en renseignements sur la nature topologique des objets étudiés. D'un autre côté la théorie des variétés est intimement reliée à celle des fonctions et des fibrés vectoriels et donc à la géométrie algébrique. C'est de ce point de vue que nous cherchons à comprendre l'oeuvre de G. Tian qui s'est employé à décrire géométriquement une compactification analytique de l'espace de modules d'instantons anti-auto-duaux.

A cet effet, nous commencerons dans une première partie par définir les outils nécessaires pour une approche algébrique et nous rappellerons les résultats classiques de la théorie de Jauge et leur interprétation algébro-géométrique via la notion de stabilité. Dans un second temps, nous expliquerons en détail la perspective de G. Tian en explicitant plus particulièrement le cas des variétés Calabi-Yau et des instantons complexes ainsi que les méthodes d'analyse complexe et harmonique qui sont nécessaires pour parvenir à la compactification de l'espace de modules. En dernier lieu, nous nous attacherons à mettre en place une stratégie d'étude de cette compactification et en particulier du lieu de singularité d'une suite dégénérescente d'instantons via une technique d'éclatements. Notre but ultime serait d'obtenir, dans le cas de variétés algébriques, une compactification encore plus naturelle que celle que propose N.P. Buchdahl grâce à la Théorie des Invariants Géométriques développée par A. Grothendieck et ainsi répondre aux conjectures posées par G. Tian. Nous présenterons ici le comportement de l'espace de modules de fibrés stables eu égard aux éclatements que nous explicitons dans le cas du plan projectif en espérant pouvoir ultérieurement compléter notre programme de recherche.

Je tiens enfin à remercier tous ceux qui ont su me faire découvrir durant ces deux dernières années l'immensité et la beauté de la géométrie algébrique et différentielle. Je veux en particulier exprimer ma reconnaissance à Philippe Eyssidieux qui a pris le temps de diriger mes premiers travaux de recherche et qui a supervisé avec attention la rédaction de ce mémoire.

1 Introduction

1.1 Rappels sur la notion de stabilité d'un fibré

Nous travaillons dans ce paragraphe sur X surface lisse algébrique et avec des fibrés vectoriels holomorphes de rang $d = 2$ sur cette surface. Fixons un fibré ample W sur X et désignons par $\mu_W(V) = \frac{1}{rang(V)}\left(c_1(V) \cdot W^{d-1}\right)$ la pente du faisceau cohérent et sans torsion V par rapport à W.

Définition 1.1.1 *V est dit W-stable (respectivement W-semi-stable) si pour tout sous-faisceau cohérent F avec $0 < rang(F) < rang(V)$ on a $\mu(F) < \mu(V)$ (respectivement $\mu(F) \leq \mu(V)$).*

Tout fibré en droite est ainsi stable. Soulignons par ailleurs que V est W-stable si et seulement si V est aW-stable et que la notion de stabilité dépend seulement de la classe d'équivalence numérique de W. Si maintenant V est un fibré de rang 2 et F est un faisceau cohérent sans torsion de rang 1, son bidual $F^{\vee\vee}$ est un faisceau réflexif de rang 1 sur la surface X et donc un sous-fibré en droite. On a donc F de la forme $D \otimes I_Z$ avec $\dim Z = 0$ et une inclusion de $F^{\vee\vee} = L$ dans $V = V^{\vee\vee}$. Ainsi, en rang 2, il suffit de regarder les sous-fibrés en droite pour vérifier la stabilité.

Le fibré V de rang 2 sera dit W-stable (respectivement W-semi-stable) si pour tout sous fibré en droite D de V, l'on a $\mu(D) < \mu(V)$ (respectivement $\mu(D) \leq \mu(V)$), ce qui se traduit simplement dans le cas où $c_1(V) = 0$ par :

$$c_1(D) \cdot c_1(W) < 0$$

Proposition 1.1 *Soit $D \xrightarrow{\phi} V$ un sous-fibré en droite (ce qui existe toujours pour un fibré vectoriel de rang 2). Alors il existe un unique diviseur effectif E sur X (qui peut être nul) telle que ϕ se factorise via l'inclusion $D \to D \otimes \mathcal{O}_X(E)$ et tel que $V/\left(D \otimes \mathcal{O}_X(E)\right)$ est sans torsion. De plus, si V/D est sans torsion (id est $E = 0$) alors il existe Z sous-schéma de dimension 0 tel que l'on ait la suite exacte :*

$$O \to D \to V \to D' \otimes I_Z \to 0$$

avec D' diviseur.

Il suffit pour vérifier la stabilité de regarder seulement les fibrés en droite D tels que V/D est sans torsion puisque dans le cas contraire la dernière proposition permet de factoriser l'application naturelle $D \to V$ via l'inclusion $D \to D \otimes \mathcal{O}_X(E)$ (E est un diviseur effectif non nul) avec $V/D \otimes \mathcal{O}_X(E)$ sans torsion et que $W \cdot (D \otimes \mathcal{O}_X(E)) = W \cdot D + W \cdot E > W \cdot D$.

Remarque 1 *Concernant les classes de Chern sur une surface lisse : nous citons les résultats classiques suivants :*

- *Si L est un fibré en droite et V un fibré de rang r, alors $c_1(V \otimes L) = c_1(V) + rc_1(L)$.*

– *Si V est un fibré de rang 2 pour lequel on a la suite exacte :*

$$0 \to L \to V \to L' \otimes I_Z \to 0$$

où Z sous-schéma supporté par $\{p_1, ..., p_k\}$ de dimension 0, alors :

$$\begin{array}{rcl} c_1(V) & = & c_1(L) + c_1(L') \\ c_2(V) & = & c_1(L)c_1(L') + l(Z) \end{array}$$

avec $l(Z) = \sum_i \dim \mathcal{O}_{X,p_i}/I_{Z,p_i} = c_2(I_Z)$ en appliquant la formule du produit de Whitney à ($j : Z \to X$ désigne juste l'inclusion) :

$$0 \to I_Z \to \mathcal{O}_X \to j_*\mathcal{O}_Z \to 0$$

Donnons maintenant quelques résultats classiques concernant les fibrés stables et en particulier pour ceux sur $\mathbb{P}_2$ où la notion de stabilité est bien sûr par rapport à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$.

Proposition 1.2 *Soit V un faisceau sans torsion sur X. Alors,*

1. *V est stable si et seulement si pour tout sous-faisceau cohérent F de V pour lequel $rang(F) < rang(V)$ et tel que V/F est sans torsion, on a $\mu(F) < \mu(V)$.*
2. *V est stable si et seulement si $V^{\vee\vee}$ est stable.*
3. *V est stable si et seulement si il existe un fibré en droite D tel que $V \otimes D$ est stable.*

▶ Regardons ce qui se passe dans le cas du rang 2. On sait alors que $\mu(V \otimes F) = \mu(V) + W \cdot F$ et l'on peut conclure pour 1) et 3). Enfin, dans le cas du rang égal à 2, $V^{\vee\vee} = V$. ■

Proposition 1.3 *Si $\phi : V_1 \to V_2$ est un homomorphisme entre deux faisceaux sans torsion stables et que $\mu(V_1) = \mu(V_2)$ alors ϕ est injective et même un isomorphisme si V_i sont des fibrés vectoriels ou $V_1 = V_2$.*

Proposition 1.4 *Si V est un faisceau stable sans torsion, alors V est simple, c'est à dire $EndV = \{\lambda Id : \lambda \in \mathbb{C}\}$.*

▶ La dernière proposition prouve que si ϕ est un endomorphisme non nul de V alors c'est un isomorphisme. Un résultat standard d'algèbre (Lemme de Schur) assure alors que $EndV$ est une algèbre de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et finalement $EndV = \mathbb{C}$. ■

Lemme 1.1 *Pour un fibré V de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$, il existe un entier k_V et un sous-fibré en droite $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k_V)$ de V tel que, pour tout entier k, s'il y a une application non nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to V$ alors $k \leq k_V$. De plus, le quotient de V par un sous-fibré en droite de V isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k_V)$ est sans torsion.*

▶ Pour $k \ll 0$ il existe une application non nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to V$ et en utilisant la proposition n°1.1, il existe un diviseur effectif D sur $\mathbb{P}_2$ tel que cette application se factorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(D)$ avec un quotient de la forme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \otimes I_Z$. Ainsi, il existe des entiers l et k' et une suite exacte de la forme

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(l) \to V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \otimes I_Z \to 0$$

Si $n > \max(l, k')$ alors $Hom(\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(n), V) = H^0(V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-n)) = 0$ et l'existence de l'entier k_V s'ensuit. ■

Corollaire 1.1 *V est stable si et seulement si $2k_V < d$, où $\det V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(d)$.*

▶ V est stable si et seulement si pour toute application non nulle $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to V$, nous avons $k < \frac{1}{2}d$ ce qui est équivalent à $k_V < \frac{1}{2}d$. ■

Corollaire 1.2 *Un fibré de rang 2 sur $\mathbb{P}_2$ est stable si et seulement s'il est simple.*

▶ Dans un sens, c'est directement la proposition n°1.4. Si V n'est pas stable et que $\det V = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(d)$ alors il existe une suite exacte

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \otimes I_Z \to 0$$

avec $k + k' = d$ et $2k \geq d$. Alors, $k' \leq k$ et il existe une inclusion $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \otimes I_Z \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k)$.
Ainsi, on obtient une application non nulle $V \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k') \otimes I_Z \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(k) \to V$ qui n'est pas une multiplication par un scalaire. Alors, V n'est pas simple. ■

1.2 Connexions anti-auto-duales et fibrés stables

Désignons par M une variété et E un fibré vectoriel C^∞ sur M de rang r. Nous savons que la différence entre deux connexions est une forme C^∞ à coefficients dans $EndE$. Pour toute connexion D, il existe une extension naturelle en un opérateur $A^p(E)$ vers $A^{p+1}(E)$ où $A^i(E)$ est le fibré vectoriel des i-formes à coefficients dans E en satisfaisant la règle de Leibniz. Dans le cas où $E = E_1 \oplus E_2$ et où parallèlement on a $D = D_1 \oplus D_2$, avec D_i connexion sur E_i, D sera dite réductible et irréductible dans le cas contraire.
En choisissant une base locale (s_i) de sections C^∞ on peut identifier une section avec un vecteur de sections et écrire $Ds = ds + As$ où A est une matrice de 1-formes, nommée matrice de connexion. Dans ce cas, la courbure est donnée localement par

$$D^2 = F_A = dA + A \wedge A \in \Gamma(A^2(EndE))$$

Supposons que E soit muni d'une métrique hermitienne $<,>$ et que D soit compatible avec cette métrique, c'est à dire $< Ds_1, s_2 > + < s_1, Ds_2 >= d < s_1, s_2 >$ où $(s_i)_{i=1..r}$ est orthonormale pour $<,>$. Alors A est une 1-forme à valeurs dans $\mathcal{U}(r)$, l'algèbre de Lie de $U(r)$, et A est dite unitaire (ou hermitienne).

Supposons désormais que M est une variété complexe et donc que $d = \partial + \bar{\partial}$. Notons $\Omega^{p,q}(M)$ le fibré vectoriel des formes de type (p,q). Alors, si E est un fibré holomorphe, $\bar{\partial}$ est bien défini sur les sections C^∞ de E et nous dirons que D est compatible avec la structure complexe si $\pi^{0,1}(D) = \bar{\partial}$ où $\pi^{0,1} : A^1(E) \to \Omega^{0,1}(E)$ est la projection induite par la projection des 1-formes sur M sur les $(0,1)$-formes. Remarquons aussi que $\pi^{0,2}D^2 = 0$.
Supposons maintenant que M est une variété Kählerienne munie d'une métrique de Kähler ω. Si E est un fibré vectoriel holomorphe sur M avec une métrique hermitienne et D une connexion unitaire sur E compatible avec la structure complexe, D^2 est une $(1,1)$-forme à coefficients dans $EndE$, et ainsi $D^2 \wedge \omega^{n-1}$ est une (n,n)-forme à coefficients dans $EndE$. On peut donc écrire $D^2 \wedge \omega^{n-1} = \hat{F} \cdot \omega^n$, $\hat{F}$ étant bien sûr une section C^∞ de $EndE$.

Définition 1.2.1 *Soit M une variété kählerienne compacte munie de la métrique de Kähler ω et E un fibré holomorphe sur M avec une métrique hermitienne. Si D est une connexion unitaire sur E compatible avec la structure complexe, alors D est dite Hermite-Einstein si, avec les notations précédentes $\hat{F} = \lambda Id$ où λ est une constante.*

Si $\hat{F} = \lambda Id$ alors $trace(D^2) \wedge \omega^{n-1} = r\lambda\omega^{n-1}$ et donc en intégrant,

$$-2\pi i \int_M c_1(E) \wedge \omega^{n-1} = r\lambda \int_M \omega^n = r\lambda n! Vol(M)$$

c'est à dire qu'à une constante près, $\lambda = -i\mu_\omega(E)$ avec la "pente" (ou degré normalisé)

$$\mu_\omega(E) = \frac{1}{r} \int_M c_1(E) \wedge \omega^{n-1}$$

qui est l'analogue de la pente algébrique. Considérons le cas où E est un fibré en droite muni d'une métrique $|,|^2$ et D une connexion sur E. Au fibré E on associe la connexion unitaire compatible D_0. On peut montrer que si l'on change $|,|^2$ par $e^h|,|^2$, alors D_0 est remplacée par $D_0 + \partial h$ et D_0^2 par $D_0^2 + \partial\bar{\partial}h$. Il existe un choix convenable de h tel que $D_0^2 + \partial\bar{\partial}h$ est une forme harmonique de type $(1,1)$ et s'écrit donc $\gamma\omega + \phi$ avec γ constante et ϕ $(1,1)$-forme harmonique. Le fait que M soit kählerienne et que ϕ est harmonique entraine (puisque $\int_M \phi \wedge \omega^{n-1} = 0$, puisque $[\omega^n] \neq 0$) que ϕ est orthogonale à ω^{n-1}. On voit ainsi que si D^2 est harmonique, alors D est une connexion Hermite-Einstein ce qui motive l'étude de ce type d'applications. En fait, il existe un choix unique de métrique sur E (à une constante multiplicative près) tel que la connexion compatible correspondante soit Hermite-Einstein.

Remarquons aussi, que si $c_1(E) = 0$ et M une courbe complexe compacte, alors D est Hermite-Einstein si et seulement si $D^2 = 0$, c'est à dire, par définition, si et seulement si D est une connexion plate unitaire.

Dans le cas où M est une surface kählerienne compacte de forme de Kähler ω, l'opérateur de Hodge $*$ agit sur les 2-formes et le fibré $A^2(M)$ se découpe suivant les espaces propres $\Omega^2_+(M)$ et $\Omega^2_-(M)$ pour les valeurs propres $+1$ et -1 respectivement. Ceci s'étend bien sûr à $A^2(E)$. Si l'on se donne une connexion D sur E, on peut naturellement séparer sa courbure en deux parties D^2_+ et D^2_-.

D sera dite auto-duale si $D^2_- = 0$ et anti-auto-duale si $D^2_+ = 0$. Dans le cas de la dimension 2, avec M surface de Kähler, on peut vérifier que le complexifié $\Omega^2_+(M)$ est juste $\Omega^{2,0}(M) \oplus \Omega^{0,2}(M) \oplus A^0(M)_{\mathbb{C}} \cdot \omega$ où $A^0(M)_{\mathbb{C}}$ est le fibré des fonctions C^∞ à valeurs complexes sur M et que le complexifié de $\Omega^2_-(M)$ est le complémentaire orthogonal de ω dans $\Omega^{1,1}(M)$. Ainsi, une connexion D sur E est anti-auto-duale si et seulement si la courbure D^2 est de type $(1,1)$ et orthogonale à ω. Si E est un fibré holomorphe hermitien avec $c_1(E) = 0$ et D la connexion sur E compatible avec la structure complexe, alors D est anti-auto-duale si et seulement si D est une connexion Hermite-Einstein.

On a le théorème fondamental prouvé dans l'article fondateur de Donaldson pour les surfaces algébriques et généralisé par Uhlenbeck et Yau dans le cadre des variétés kähleriennes (Cf [6],[25]).

Théorème 1 *Soit M une variété kählerienne compacte de forme de Kähler ω, et soit E un fibré vectoriel holomorphe sur M. S'il existe sur E une métrique hermitienne associée à la connexion unitaire compatible qui soit une connexion Hermite-Einstein irréductible, alors E est ω-stable. Inversement, si E est ω-stable, alors il existe une métrique hermitienne sur E associée à la connexion unitaire et compatible qui soit une connexion Hermite-Einstein irréductible sur E et cette connexion est unique à un automorphisme C^∞ de E près.*

▶ Esquissons une preuve de la première implication dans le cas où E est un fibré holomorphe de rang 2 avec une connexion Hermite-Einstein D. Soit L un sous-fibré en droite de E. Nous disposons d'une connexion Hermite-Einstein sur $E \otimes L^{-1}$ et l'on a $\mu_\omega(E \otimes L^{-1}) = \mu_\omega(E) - \mu_\omega(L)$. On remplace E par $E \otimes L^{-1}$ et il suffit donc de prouver que si E est un fibré vectoriel holomorphe de rang 2 avec $\mu_\omega(E) \leq 0$ et une connexion Hermite-Einstein associée, alors E a une section holomorphe non nulle si et seulement si $\mu_\omega(E) = 0$, et dans ce cas $E = \mathcal{O}_M \oplus L'$ avec L' sous fibré en droite et $\mu_\omega(L') = 0$.

Les identités Kähleriennes standard donnent, dans le cas d'une connexion compatible unitaire arbitraire, l'existence d'une constante $c_n \geq 0$ telle que $2\bar{\partial}^*\bar{\partial} = D^*D - c_n i\hat{F}$ avec * l'adjoint formel de l'opérateur différentiel. Comme nous sommes dans le cas d'une connexion Hermite-Einstein, nous avons $\hat{F} = -i\mu_\omega(E)$ et ainsi, après avoir remplacé convenablement $c_n \geq 0$, il existe une section holomorphe non nulle s telle que

$$D^*Ds - c_n\mu_\omega(E)s = 0$$

ce qui donne par intégration :

$$||Ds||^2 - c_n\mu_\omega(E)\int_M |s|^2 = 0$$

Dès lors, $\mu_\omega(E) = 0$ et $Ds = 0$. s est une section qui ne s'annule jamais et l'on a dès lors que $\mathcal{O}_M$ est un sous-fibré de E. En prenant le complémentaire orthogonal, il existe L' fibré en droite complexe tel que $E = \mathcal{O}_M \oplus L'$ et $D = D_1 \oplus D_2$ avec D_1 connexion triviale et D_2 connexion sur L'. Avec $0 = \mu_\omega(E) = \mu_\omega(L')$, on peut conclure. ■

Un $SU(2)$ fibré principal P sur une variété M est une variété avec une action libre et lisse de $SU(2)$ à droite vérifiant $P/SU(2) = M$. Sur P, toute $SU(2)$-connexion va induire une connexion hermitienne de manière canonique.
En effet, soit $E = P \times_{SU(2)} \mathcal{V} = P \times \mathcal{V}/\sim$ (avec $(z', v') \sim (z', v')$ s'il existe $g \in SU(2)$ telle que $(z', v') = (zg, g^{-1}v)$ et $\mathcal{V}$ un espace vectoriel de dimension 2 muni de $<,>_\mathcal{V}$ produit intérieur hermitien) qui est un fibré sur M pour lequel $\Lambda^2 E = P \times_{SU(2)} \Lambda^2\mathcal{V}$ est le fibré en droite trivial. On vérifie dans ces conditions que E peut être muni d'une métrique hermitienne h et que c'est donc un fibré vectoriel hermitien au sens usuel. Il est naturel en géométrie algébrique de s'intéresser dans un premier temps aux fibrés vectoriels V tels que $c_1(V) = 0$ (et nous entendons par là que $\Lambda^2 V$ est le fibré en droite trivial) et $c_2(V) = d$ modulo une relation d'équivalence simple : deux fibrés V_1 et V_2 sont dits équivalents s'ils sont isomorphes en tant que fibrés vectoriels holomorphes. En tant que fibrés lisses, V_1 et V_2 sont tous les deux isomorphes au même fibré E (associé à P) et l'isomorphisme (lisse) entre V_1 et V_2 est induit par une $GL(2)$ transformation de jauge (c'est à dire juste un automorphisme de $g : E \to E$ ne préservant pas h ou la forme de volume de $\Lambda^2 E$). Ainsi, on peut associer à l'espace des modules de fibrés vectoriels stables avec $c_1 = 0$ et $c_2 = d$, l'espace des {structures

holomorphes stables sur $E\}/\{GL(2)$ transformation de jauge$\}$. Avec le dernier théorème, on obtient la description de cet espace :

Théorème 2 *Soit M une surface de Kähler compacte. L'espace des modules de connexions anti-auto-duales (modulo équivalence de jauge) sur un $SU(2)$ fibré principal avec $c_2(P) = d$ est homéomorphe à l'espace de modules de fibrés vectoriels stables de rang 2 avec $c_1 = 0$ et $c_2 = d$.*

Notons $\mathfrak{M}(2, c_1, c_2)$ l'espace des modules de fibrés vectoriels stables de rang $r = 2$ avec comme invariants les 2 premières classes de Chern. En général, l'espace de modules n'est pas compact et il doit être compactifié en ajoutant des faisceaux sans torsion comme l'a fait Gieseker permettant ainsi de calculer les invariants de Donaldson. Si V est un faisceau sans torsion semi-stable de pente μ alors il existe une filtration sur V :

$$\{0\} = F^0 \subset F^1 \subset ... \subset F^k = V$$

avec F^i/F^{i-1} sans torsion et stable pour tout i, et $\mu(F^i/F^{i-1}) = \mu$. Le faisceau gradué associé à cette filtration $grV = \bigoplus_i (F^i/F^{i-1})$ est indépendant du choix de la filtration, c'est à dire canoniquement associé au faisceau V. De plus grV est semi-stable. Deux faisceaux V_1 et V_2 sont S-équivalents si les faisceaux gradués associés sont identiques. Les classes d'équivalence (données par cette relation) de faisceaux semi-stables sans torsion de rang 2 à classes de Chern fixées ont une structure de variété projective qui est en fait une compactification de l'espace $\mathfrak{M}(2, c_1, c_2)$ au sens de Gieseker (Cf [9]).

La construction de l'espace de modules peut être généralisée au cas d'une variété M de dimension 4 munie d'une métrique riemannienne g. Soit P un $SU(2)$ fibré principal sur M avec $c_2(P) = c \in H^4(M, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$. Soit A une connexion sur le $SU(2)$-fibré principal P. F_A est une 2-forme, et en utilisant la métrique g, il existe un $*$-opérateur de Hodge de $A^k(M) \to A^{4-k}(M)$ où $A^k(M)$ est le fibré de 2-formes lisses sur M. En particulier $* : A^2(M) \to A^2(M)$ satisfait $*^2 = Id$ et l'on peut décomposer $\Omega^2_M = \Omega^2_+(M) \oplus \Omega^2_-(M)$ selon les valeurs propres. Si $b_2^+(M) > 0$ l'ensemble des connexions anti-auto-duales A sur P, modulo l'action du groupe des automorphismes C^∞ de fibrés de P est une variété de dimension finie $\mathcal{M}$. Dans le cas complexe, le théorème n°2 prouve juste que l'on peut identifier $\mathcal{M}$ avec $\mathfrak{M}$ espace de modules de fibré stable de rang 2 avec $c_1 = 0$, $c_2 = 2$. $\mathcal{M}$ peut toujours être vu localement comme un espace réel analytique et en ce sens les espaces $\mathcal{M}$ et $\mathfrak{M}$ sont isomorphes. $\mathcal{M}$ est aussi généralement non compact mais l'on dispose d'une autre compactification $X(P, g)$, la compactification d'Uhlenbeck. Celle-ci s'appuie essentiellement sur le résultat suivant :

Théorème 3 ***(K. Uhlenbeck, 1984)***
Soit A_i une suite de connexions anti-auto-duales sur (E, h) fibré de rang 2 sur X variété de dimension réelle 4, munie d'une métrique hermitienne h. Alors, quitte à prendre une sous-suite, il existe

- *Un ensemble fini de points $\{x_i\}$ de multiplicité $\{m_i\}$ et,*
- *Une connexion anti-auto-duale A_0 sur un $SU(2)$ fibré (E_0, h_0),*
- *Des transformations de jauge $g_{i'}$ de (E, h) et un isomorphisme*

$$g_\infty : E_{|X \setminus \cup\{x_i\}} \to E_{0|X \setminus \cup\{x_i\}}$$

tels que pour tout sous-ensemble compact $K \subset X \backslash \cup_i \{x_i\}$,

$$\lim_{i' \to \infty} g_{i'}^{*}(A_{i'})_{|K} = g_{\infty}^{*}(A_0)_{|K}$$

au sens de la C^1*-topologie. De plus, en considérant* $|F_{A_{i'}}|^2$ *et* $|F_A|^2$ *comme des mesures sur* X *et en utilisant la topologie faible, on a :*

$$\lim_{i' \to \infty} |F_{A_{i'}}|^2 = |F_{A_0}|^2 + 8\pi^2 \sum_{i=1}^{p} m_i \delta_{x_i}$$

L'espace $X(P,g)$ n'est pas en général une variété mais c'est un espace stratifié et l'on peut définir là aussi des invariants de Donaldson. Remarquons que cette compactification est très différente de celle donnée par Gieseker qui obtient un schéma projectif. Dans le cas de la compactification d'Uhlenbeck qui est faite sur une variété riemannienne de dimension 4, il y a une infinité d'espaces de modules qui sont de natures différentes (Cf [11]) tandis que grâce à la théorie des invariants géométriques, le nombre de quotients distincts est fini.

L'espace de modules $X(P,g)$ admet une singularité quand le fibré P admet une connexion anti-auto-duale réductible. Par la théorie de Hodge, on peut voir que cela arrive quand il existe un fibré en droite complexe L sur M tel que le fibré (en plan) V de rang 2 sur M associé à la représentation standard de $SU(2)$ est isomorphe à $L \oplus L^{-1}$ et tel que $c_1(L)$ est orthogonal à toute 2-forme harmonique auto-duale et l'on peut démontrer que les singularités de $\mathcal{M} = \mathcal{M}(P,g)$ sont en correspondance avec les fibrés strictement semi-stables dans le cas des surfaces de Kähler.

Enfin, et cela n'est pas trivial, on dispose de résultats d'existence (en dimension quelconque, pour tout rang et sur des surfaces algébriques) :

Théorème 4 *Pour* c_1 *et* c_2 *bien choisis,* $\mathfrak{M}(r, c_1, c_2) \neq \emptyset$.

2 Théorie de Jauge en dimension supérieure

Le travail de G. Tian (Cf [22]) consiste notamment en la description géométrique des lieux où il y a singularité pour une suite de connexions anti-auto-duales lorsque la variété M considérée est de dimension supérieure ou égale à 4. Le but est évidemment de donner une compactification aussi naturelle que possible via des techniques de géométrie différentielle et d'analyse harmonique de l'espace de modules d'instantons anti-auto-duaux, ce qui permettrait d'introduire les invariants de Donaldson en dimension supérieure, au moins dans le cadre des variétés Calabi-Yau.

2.1 Formule de monotonie et estimations de courbure

M est une variété riemannienne munie d'une métrique g et $E : P \to M$ est un fibré principal sur P de groupe G compact. Soit maintenant A une connexion lisse de E. Nous allons calculer une première formule de variation pour l'action de Yang-Mills. Dans ce but, exprimons la norme de la courbure en $p \in M$:

$$|F_A|^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} < F_A(e_i, e_j), F_A(e_i, e_j) >$$

avec $(e_i)_i$ une base de T_pM et $<,>$ est la forme de Killing. L'idée est maintenant de construire à partir de la connexion A une famille de connexions A^t qui va dépendre d'une famille de difféomorphismes de M à un paramètre. Soit $\{\phi_t\}_{t \in]-\varepsilon, \varepsilon[}$ avec $\phi^0 = Id$ une telle famille de difféomorphismes. Nous associons à A sa dérivée covariante D. Pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p tel qu'il existe une carte sur U pour M et l'on ait $E_{|U} \simeq U \times \mathbb{R}^n$ avec n la dimension de la fibre de E. Nous obtenons des champs de vecteurs en coordonnées que nous notons $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{i=1..n}$ et une base $(\mu_i)_{i=1..n}$ de sections de $E_{|U}$. Si $s \in \Gamma(E)$, on peut écrire localement en utilisant la convention de sommation d'Einstein :

$$s(y) = a_k(y)\mu_k(y)$$

Si $c(t)$ représente une courbe lisse dans U, $s(t) := s(c(t))$ est une section de E le long de la courbe c. Avec $V(t) = \dot{c}(t) = \dot{c}_i(t)\frac{\partial}{\partial x^i}$, et la définition de la dérivée covariante nous assure que

$$\begin{aligned} D_{V(t)}s(t) &= \dot{a}_k(t)\mu_k(c(t)) + \dot{c}_i(t)a_k(t)\left(D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mu_k\right)(c(t)) \\ &= \dot{a}_k(t)\mu_k(c(t)) + \dot{c}_i(t)a_k(t)\Gamma^j_{ik}(c(t))\mu_j(c(t)) \end{aligned}$$

où $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\mu_k = \Gamma^k_{ij}\mu_k$ avec Γ^k_{ij} est le symbole de Christoffel. Cette dernière expression permet de voir que $D_X s$ ne dépend que de la valeur de s le long de la courbe c (avec $\dot{c}(0) = X$) et non de toutes les valeurs de s dans un voisinage du point de base de X. $D_{V(t)}s(t) = 0$ représente un système linéaire d'équations linéaires du premier ordre en les coefficients $a_k(t)$. Ainsi, en se donnant une condition initiale $s(0) \in E_{c(0)}$, il existe une unique solution à cette équation, et celle-ci est appelée le transport parallèle de $s(0)$ le long de la courbe c. Notons que le transport parallèle constitue une isométrie des fibres correspondantes pour toute connexion. Dans le cas où $c = \phi_z(x)_{0 \leq z \leq t}$, (avec $x \in M$), on obtient une unique section $\tau^0_t(u)$ telle que

$\tau_0^0(u) = u$ pour tout $u \in E_x$. On peut alors définir A^t par sa dérivée covariante D^t en posant pour tout $X \in TM$, $v \in \Gamma(E)$:

$$D_X^t v = \left(\tau_t^0\right)^{-1} \left(D_{d\phi_t(X)} \left(\tau_t^0(v)\right)\right)$$

En fait, nous venons de construire un relèvement $\widehat{\phi_t^*}$ de ϕ_t^* au niveau du fibré principal, et la dernière expression n'est autre que celle donnée par ce relèvement appliqué à A^t :

$$A^t = \widehat{\phi_t^*} A$$

où A est vue comme une 1-forme à valeurs dans $\mathfrak{G}$ sur P. Dès lors, nous pouvons exprimer la forme de courbure de A^t qui est donnée par

$$F_{A^t}(X,Y) = \left(\tau_t^0\right)^{-1} \cdot F_A(d\phi_t(X), d\phi_t(Y)) \cdot \left(\tau_t^0\right)$$

et comme τ_t^0 est une isométrie, on obtient par un changement de base, une expression simple de l'action de Yang-Mills pour A^t en fonction de A, dans une base orthonormale quelconque de TM :

$$YM(A^t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_M \sum_{i<j}^n \left| F_A \left(d\phi_t \left(e_i \left(\phi_t^{-1}(x) \right) \right), d\phi_t \left(e_j \left(\phi_t^{-1}(x) \right) \right) \right) \right|^2 Jac \left(\phi_t^{-1} \right)(x)\, dV_g(x)$$

(dV_g est la forme de volume pour la métrique g).

Si A est une connexion de Yang-Mills, alors par définition $\frac{d}{dt} YM(A^t)_{|t=0} = 0$, et comme un calcul permet d'exprimer plus explicitement $YM(A^t)$, on obtient une première formule de variation :

$$0 = \int_M \left(|F_A|^2 divX - 4 \sum_{i<j}^n < F_A(\nabla_{e_i} X, e_j), F_A(e_i, e_j) > \right) dV_g$$

avec $X = \frac{\partial \phi_t}{\partial t}|_{t=0}$, ∇ la connexion de Levi-Civita induite par g, ainsi que

$$div(X) = < \nabla_{e_i} X, e_i >$$

Nous allons à présent pouvoir établir une formule de monotonie pour une connexion de Yang-Mills. Soit $p \in M$; on note $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial r} \lrcorner F_A = F_A\left(\frac{\partial}{\partial r}, .\right)$ et l'on considère une boule géodésique $B_{r_p}(p)$ centrée en p, de rayon r_p tel que si l'on note $r(x)$ la distance de x à p, l'on ait :

$$\begin{aligned} |g_{ij} - \delta_{ij}| &\leq c(p) r(x)^2 \\ |dg_{ij}| &\leq c(p) r(x) \end{aligned}$$

Ces conditions vont nous permettre d'appliquer la première formule de variation au champ radial $r\frac{\partial}{\partial r}$. Soit en effet,

$$X(x) = \xi(r) \phi\left(\frac{x}{r}\right) r \frac{\partial}{\partial r} = \xi(r) \phi\left(\frac{x}{r}\right) \left(\sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right)$$

avec ξ de classe C^∞ à support compact dans $B_{r_p}(p)$ et ϕ une application définie sur S^{n-1} et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ (l'introduction de cette fonction nous permettra d'obtenir facilement une généralisation du théorème de Price [19] en prenant tout simplement $\phi = 1$). Si l'on prend au voisinage de p une base orthonormale $(e_i)_{i=1..n}$ avec $e_1 = \frac{\partial}{\partial r}$, on obtient que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} X = (\xi' r + \xi)\phi\left(\frac{x}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}$ et l'on peut aussi approximer la quantité $< \nabla_{e_i} X, e_i >$.
Enfin, on choisit pour $r \mapsto \xi(r)$ la fonction lisse $r \mapsto \eta(\frac{r}{\tau})$ avec $\eta(u) = 1$ pour $u \in [0,1]$ et $\eta(u) = 0$ pour $u \in [1+\varepsilon, \infty[$ ainsi que $\eta'(r) \leq 0$. Ainsi ξ est une approximation de la fonction caractéristique de $B_\tau(p)$ et c'est le terme qui donne l'expression de l'action sur $B_\tau(\rho)$. En appliquant ces résultats à la première formule de variation, on obtient une formule de monotonie pour la connexion A, c'est à dire une inégalité qui nous indique comment varie précisément localement l'action "radiale" de la fonctionnelle de Yang-Mills. De plus, si l'on exige que l'action est finie, le résultat reste inchangé dans le cas d'une singularité isolée en p pour la connexion A. De manière plus explicite,

Théorème 5 ***(G. Tian - Généralisation du théorème de D. Price)***
Soit r_p et $c(p)$ définis comme précédemment. Il existe une constante $\lambda(n)$ ne dépendant que de n, telle que si $a \geq \lambda(n)c(p)$ et $a > 0$, alors on ait, pour tous $0 < \sigma < \rho < r_p$,

$$\rho^{4-n} e^{a\rho^2} \int_{B_\rho(p)} \phi |F_A|^2 dV_g - \sigma^{4-n} e^{a\sigma^2} \int_{B_\sigma(p)} \phi |F_A|^2 dV_g \geq 4 \int_{B_\rho(p)\setminus B_\sigma(p)} r^{4-n} e^{ar^2} \phi \left| \frac{\partial}{\partial r} \lrcorner F_A \right|^2 dV_g$$
$$-4 \int_\sigma^\rho \tau^{3-n} e^{a\tau^2} \int_{B_\tau(p)} r \left|\frac{\partial}{\partial r} \lrcorner F_A\right| |\nabla_\phi \lrcorner F_A| dV_g \, d\tau$$

et le même raisonnement donne aussi :

$$-\rho^{4-n} e^{-a\rho^2} \int_{B_\rho(p)} \phi |F_A|^2 dV_g + \sigma^{4-n} e^{-a\sigma^2} \int_{B_\sigma(p)} \phi |F_A|^2 dV_g \geq -4 \int_{B_\rho(p)\setminus B_\sigma(p)} r^{4-n} e^{-ar^2} \phi \left| \frac{\partial}{\partial r} \lrcorner F_A \right|^2 dV_g$$
$$-4 \int_\sigma^\rho \tau^{3-n} e^{-a\tau^2} \int_{B_\tau(p)} r \left|\frac{\partial}{\partial r} \lrcorner F_A\right| |\nabla_\phi \lrcorner F_A| dV_g \, d\tau$$

Remarquons que la démonstration de G. Tian fournit en fait une égalité, mais que seule cette majoration nous sera utile pour l'étude des lieux d'éclatements. Ce résultat est relié à certaines propriétés des applications minimisant la fonctionnelle d'énergie classique $\mathcal{E}_{B_\rho(p)}(u) = \int_{B_\rho(p)} |Du|^2$ avec $u \in W_2^1(\Omega, N)$ où $N \subset \mathbb{R}^n$ est une variété riemannienne lisse compacte de dimension $n \geq 2$ (Cf [20]). Si l'on se donne une telle application u et une famille, dite "variation admissible de u", à 1-paramètre $\{u_s\}_{s\in]-\delta,\delta[}$ d'applications de $B_\rho(y)$ dans N telle que $u_0 = u$, $Du_s \in L^2$, et $u_s =_{|\partial B_\rho(p)} u$ pour $s \in]-\delta, \delta[$, alors $\mathcal{E}_{B_\rho(p)}(u_s)$ prend son minimum en $s = 0$ et $\frac{d\mathcal{E}_{B_\rho(p)}(u_s)}{ds} = 0$ dès que la dérivée à gauche existe. On distingue alors des classes de variations admissibles dont notamment les variations de la forme $u_s(x) = u(x + s\xi(x))$ avec $\xi = (\xi^1, ..., \xi^n)$ et $\xi^j \in C_c^\infty(B_\rho(p))$. La condition de minimalité entraine alors presque directement que

$$\int_{B_\rho(p)} \sum_{i,j=1}^n \left(|Du|^2 \delta_{ij} - 2D_i u \cdot D_j u\right) D_i \xi^i = 0$$

et l'on obtient aisément que si $\overline{B_{\rho_o}(p)} \subset \Omega$, alors pour tous $0 < \sigma < \rho < \rho_0$ la formule de monotonie suivante :

$$\rho^{2-n} \int_{B_\rho(p)} |Du|^2 - \sigma^{2-n} \int_{B_\sigma(p)} |Du|^2 = 2 \int_{B_\rho(p) \backslash B_\sigma(p)} R^{2-n} \left| \frac{\partial u}{\partial R} \right|^2$$

(ici $R = dist(p, y)$). On remarque en particulier que $\rho^{2-n} \int_{B_\rho(p)} |Du|^2$ est une fonction croissante en ρ et que l'on peut faire tendre σ vers 0.

Grâce à cette formule de monotonie, nous sommes en mesure d'établir une autre estimation locale de la courbure due à K. Uhlenbeck :

Théorème 6 ***(K. Uhlenbeck)***
Soit A une connexion de Yang-Mills. Ils existent $\varepsilon(n) = \varepsilon > 0$ et $C(n) = c > 0$ deux constantes ne dépendant que de n et de M, telles que pour tous $p \in M$ et $\rho < r_p$ qui vérifient

$$\rho^{4-n} \int_{B_\rho(p)} |F_A|^2 dV_g \leq \varepsilon$$

l'on ait l'inégalité :

$$|F_A|(p) \leq \frac{C}{\rho^2} \left(\rho^{4-n} \int_{B_\rho(p)} |F_A|^2 dV_g \right)^{\frac{1}{2}}$$

La démonstration s'appuie la formule de la monotonie et de l'itération de Moser (Cf p :34) et le théorème n'est autre qu'une reformulation d'un théorème de Schoen pour les applications harmoniques (Théorème n°2.3 p :330 de [21] ou généralisation du lemme 3.1 de [17]).

2.2 Connexions admissibles, connexions anti-auto-duales généralisées

Nous renvoyons à l'annexe pour la définition de mesure m dimensionnelle de Hausdorff H^m.

Définition 2.2.1 *Une connexion de Yang-Mills admissible est une connexion A lisse définie en dehors d'un sous-ensemble fermé $S(A) \subset M$ -l'espace singulier de A-, et qui vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$H^{n-4}(S(A) \cap K) < \infty$ pour tout sous-ensemble compact $K \subset M$*
2. *A est une connexion de Yang-Mills sur $M \backslash S(A)$*
3. *$\int_{M \backslash S(A)} |F_A|^2 dV_g < \infty$ c'est à dire que A est d'action finie sur $M \backslash S(A)$.*

Définition 2.2.2 *Deux connexions admissibles A_1 et A_2 sont "jauge-équivalentes" si l'on dispose d'une transformation de jauge σ de E sur $M \backslash S(A_1) \cup S(A_2)$ telle que $\sigma(A_1) = A_2$ sur $M \backslash S(A_1) \cup S(A_2)$.*

Nous allons étendre pour les connexions admissibles la définition des caractères de Chern lorsque G est un groupe unitaire : nous savons bien sûr que $tr(F_A)$ et $tr(F_A \wedge F_A)$ sont fermées sur $M\backslash S(A)$ et le fait que $\int_{M\backslash S(A)} |F_A|^2 dV_g < \infty$ avec le théorème de Price implique que l'on peut considérer ces formes sur M tout entier au sens des distributions.

Nous allons redéfinir la notion de connexions anti-auto-duales dans le cas où l'on ne suppose plus G compact. Soit $n = \dim M$ et $\pi : E \to M^n$ un fibré unitaire de rang complexe r, Ω une forme fermée de degré $n-4$; donnons nous une connexion A unitaire du fibré E sur M. Alors, nous savons que $tr(F_A)$ est une 2-forme fermée et nous dirons que A est Ω-anti-auto-duale si $tr(F_A)$ est harmonique et que F_A vérifie l'équation :

$$\Omega \wedge \left(F_A - \frac{1}{r} tr(F_A) Id\right) = - * \left(F_A - \frac{1}{r} tr(F_A) Id\right)$$

Dans ces conditions, A est bien une connexion de Yang-Mills, et si M est une variété compacte sans bord, on dispose en prime de l'égalité :

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_M |F_A|^2 dV_g - \frac{1}{4r\pi^2} \int_M |tr(F_A)|^2 dV_g = \left(2C_2(E) - \frac{r-1}{r} C_1(E)^2\right) \cdot [\Omega]$$

Similairement à ce que nous venons de définir, nous disposons d'instantons Ω-anti-auto-duaux admissibles en demandant à la connexion A d'être Ω-anti-auto-duale en dehors de l'espace singulier $S(A)$.

Proposition 2.1 *Les définitions des caractères de Chern*

$$Ch_1(A) = \frac{i}{2\pi} tr(F_A)$$

et

$$Ch_2(A) = \frac{-1}{4\pi^2} tr(F_A \wedge F_A)$$

peuvent être étendues au cas des connexions de Yang-Mills admissibles (au sens des distributions).

2.3 Rectifiabilité du lieu d'éclatement

Nous nous intéressons maintenant aux suites de connexions de Yang-Mills admissibles qui sont convergentes.

Définition 2.3.1 *Nous dirons qu'une suite $(A_i)_i$ de connexions de Yang-Mills admissibles converge faiblement vers une connexion de Yang-Mills admissible A (modulo une transformation de Jauge) si :*

1. $\exists c : \int_M |F_{A_i}|^2 dV_g \leq c$
2. *$\exists S \subset M$ avec S fermé, il existe des transformations de Jauge σ_i du fibré principal E sur $M\backslash S$ de groupe G avec pour tout $K \subset M\backslash S$ compact, $\sigma_i(A_i)$ s'étende à K de façon lisse pour i assez grand et converge vers A au sens de la topologie C^∞ dans K.*

En particulier, nous aurons que pour toute forme ϕ à support compact dans M,

$$\int_M (F_{\sigma_i(A_i)}, d\phi) dV_g \underset{i}{\to} \int_M (F_A, d\phi) dV_g$$

Proposition 2.2 *Soit (A_i) une suite de connexions de Yang-Mills admissibles vérifiant l'inégalité $\int_M |F_{A_i}|^2 dV_g \leq \Lambda$. Alors il existe une sous-suite $\left(A_{i_j}\right)$ qui converge faiblement vers une connexion de Yang-Mills admissible A sur M.*

▶ Soit ε choisi comme dans le théorème d'Uhlenbeck n°6. Soit pour chaque i et $r > 0$ suffisament petit l'ensemble fermé $E_{i,r} = \{x \in M : e^{ar^2} r^{4-n} \int_{B_r(x)} |F_{A_i}|^2 dV_g \geq \varepsilon\}$. Avec la formule de la monotonie $E_{i,r} \subset E_{i,r'}$ pour $r \leq r'$. Grâce au procédé diagonal, on peut extraire une sous suite $E_{i_j,2^{-k}}$ convergeant vers $E_{2^{-k}}$. Nous poserons $S = \cap_k E_{2^{-k}}$. S est de codimension de Hausdorff au moins 4, et A_{i_j} converge vers une connexion A en dehors de S modulo des transformations de jauge. ■

Nous supposons à présent que la suite A_i converge faiblement vers une connexion admissible de Yang-Mills A au sens de la définition précédente et que l'on a toujours une action finie $\int_M |F_{A_i}|^2 dV_g \leq \Lambda$.

Définition 2.3.2 *Soit l'ensemble*

$$S_b(\{A_i\}) = \bigcap_{r>0} \{x \in M : \liminf_{i\to\infty} e^{ar^2} r^{4-n} \int_{B_r(x)} |F_{A_i}|^2 dV_g \geq \varepsilon\}$$

avec ε donné par le théorème n°6 d'Uhlenbeck vu précédemment.

Proposition 2.3 *$S_b(\{A_i\})$ est fermé et contenu dans S. Sa $(n-4)$-mesure de Hausdorff est majorée par une constante C ne dépendant que de M et de la constante Λ, c'est à dire $H^{n-4}(S_b(\{A_i\})) \leq C$. De plus, A s'étend en une connexion lisse sur $M \backslash S_b(\{A_i\})$.*

▶ Soit $y \in M \backslash S_b(\{A_i\})$. Par définition, et quitte à extraire, il existe un $r_0 > 0$ tel que $r_0 \int_{B_{r_0}(y)} |F_{A_n}|^2 dV_g < \varepsilon$. Le même théorème d'Uhlenbeck assure alors que

$$\sup_n \sup_{x \in B_{r_0/2}(y)} |F_{A_n}| \leq \frac{c(n,M)}{r_0^2} \sqrt{\varepsilon}$$

et donc pour tout $r \leq \frac{r_0}{\sqrt[4]{c'(g,M)+1}}$ suffisamment petit, on obtient

$$\sup_n \sup_{x \in B_{r_0/4}(y)} r^{4-n} \int_{B_r(y)} |F_{A_n}|^2 dV_g \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui prouve que $B_{r_0}(y) \subset M \backslash S_b(\{A_i\})$. Dès lors $S_b(\{A_i\})$ est bien fermé et A est limite d'une sous-suite de connexions de la suite $(A_n)_n$ dans la boule $B_{r_0}(y)$. Enfin, il est évident que $S_b(\{A_i\}) \subset S$ et l'on peut conclure grâce à la dernière proposition. ■

Remarque 2 *Ce résultat généralise celui d'Uhlenbeck qui avait démontré que $S_b(\{A_i\})$ est de codimension au moins 4.*

Nous avons donc $S(A) \subset S_b(\{A_i\})$. Nous allons chercher à exprimer $S_b(\{A_i\}) \backslash S(A)$. Considérons les mesures de Radon $\mu_i = |F_{A_i}|^2 dV_g$. Quitte à prendre une sous-suite, nous savons que $\mu_i \to \mu$ faiblement sur M en tant que mesures de Radon, c'est à dire pour toute application ϕ continue à support compact dans M :

$$\lim_{i\to\infty} \int_M \phi |F_{A_i}|^2 dV_g = \int_M \phi d\mu$$

et le lemme de Fatou nous donne la décomposition $\mu = |F_A|^2 dV_g + \nu$ où ν est une mesure de Radon positive qui est en fait H^{n-4} rectifiable.

Proposition 2.4 $\nu(x) = \Theta(x) H^{n-4}_{|S_b(\{A_i\})} = \mu_{|S_b(\{A_i\})}$, *avec* $x \in M$, *et pour* H^{n-4}*-presque tout* $x \in S_b(\{A_i\})$, *on a l'encadrement de la densité* Θ *:*

$$\varepsilon \leq \Theta(x) \leq 4^{n-4} r_x^{4-n} e^{ar_x^2} \Lambda$$

et a, r_x *sont donnés par les théorèmes d'approximations précédents.*

▶ La démonstration s'appuie essentiellement sur les points suivants :
(a) $r \mapsto e^{ar^2} r^{4-n} \mu(B_r(x))$ est croissante et la limite $\lim_{r\to 0+} r^{4-n}\mu(B_r(x)) = \Theta(\mu, x)$ existe.
(b) $[x \in S_b(\{A_i\})] \Leftrightarrow [\Theta(\mu, x) \geq \varepsilon]$
(c) Pour H^{n-4}-presque tout $x \in S_b(\{A_i\})$,

$$\lim_{r\to 0+} r^{4-n} \int_{B_r(x)} |F_A|^2 dV_g = 0$$

Définition 2.3.3 *Soit*

$$S_b = \overline{\{x \in S_b(\{A_i\}) : \Theta(\mu, x) > 0, \lim_{r\to 0+} r^{4-n} \int_{B_r(x)} |F_A|^2 dV_g = 0\}} = \overline{S_b(\{A_i\}) \backslash S(A)}$$

Alors $S_b(\{A_i\}) = S_b \cup S(A)$ *et nous appellerons* (S_b, Θ) *le lieu d'éclatement de la suite faiblement convergente* $\{A_i\}$. S_b *est le support de l'éclatement et* Θ *sa multiplicité. Dans le cas où* $n = 4$, S_b *consiste en un nombre fini de points et la limite de la suite* $\{A_i\}$ *peut être étendue en une connexion de Yang-Mills sur* M *tout entier. Le but de ce qui suit est d'étudier les propriétés géométriques de l'ensemble* S_b.

Pour tout $y \in M$ et λ suffisament petit, nous posons la mesure reparamétrisée

$$\mu_{y,\lambda}(E) = \lambda^{4-n} \mu(\exp_y(\lambda E))$$

avec $E \subset T_y M$ et $\exp_y : T_y M \to M$ est l'application exponentielle de la métrique g, ainsi que $\lambda E = \{x \in T_y M : \lambda^{-1} x \in E\}$ et toujours $\mu = \lim \mu_i$.

Remarque 3 *Rappelons que* $\exp_y : \begin{cases} V_y \to M \\ v \mapsto c_v(1) \end{cases}$ *avec* $V_p = \{v \in T_p M : c_v$ *défini sur* $[0,1]\}$ *et* c_v *est l'unique géodésique sur la variété riemannienne* M *avec* $c_v(0) = p$ *et* $\dot{c}(0) = v$ *définie sur* $[0, \varepsilon]$. *L'application* $\exp_p$ *envoie un voisinage de* $0 \in T_p M$ *difféomorphiquement sur un voisinage* $p \in M$.

L'idée est maintenant d'étudier la structure locale de μ. Pour cela, nous introduisons la notion de mesure tangente ou mesure de cône, qui permet de comprendre le comportement local d'une mesure comme le font, de manière analogue, les dérivées d'une fonction. Pour cela, considérons l'application $T_{a,r}(x) = \frac{(x-a)}{\lambda}$. L'image d'une mesure de Radon μ par $T_{a,\lambda}$ est la mesure $T_{a,\lambda}[\mu](E) = \mu(\lambda E + a)$. Dans ce cas, η est dite mesure de cône si η est une mesure non nulle et qu'il existe des suites (λ_i), (c_i) de nombres réels positifs tels que $\lambda_i \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et $c_i T_{a,\lambda_i}[\mu] \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \eta$ au sens faible, ce qui veut dire en d'autres termes que, pour toute $\phi \in C_0^\infty$,

$$c_i \int \phi\left(\frac{x-a}{\lambda}\right) d\mu x \underset{i\to\infty}{\longrightarrow} \int \phi \, d\eta.$$

Lemme 2.1 *Soit une suite réelle $(\lambda_k)_k$ telle que $\lambda_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Alors il existe une sous-suite $(\lambda'_k)_k$ et une mesure de Radon η sur T_yM telle que $\mu_{y,\lambda'_k} = \lambda_k^{4-n}\mu(\exp_y(\lambda_k E))$ converge faiblement vers η. La mesure η est donc une mesure de cône.*

Nous allons ensuite relier la mesure de cône avec la mesure μ.

Lemme 2.2 ***(Lemme géométrique)***
Soit $x \in S_b$ tel que $\Theta(\mu, x) \geq \varepsilon_o > 0$ et $\Theta(\mu, .)$ est H^{n-4}-approximativement continue en x c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{r\to 0} \frac{H^{n-4}(\{y \in B_r(x) \cap S_b : |\Theta(\mu, y) - \Theta(\mu, x)| > \varepsilon\})}{r^{n-4}} = 0$$

Alors il existe $r_x > 0$ tel que pour tout $r \in]0, r_x[$, on puisse trouver $n-4$ points $x_1, ..., x_{n-4}$ dans $B_r(x) \cap S$ qui satisfassent :

1. *$\Theta(\mu, x_j) \geq \Theta(\mu, x) - \varepsilon(r)$ pour $1 \leq j \leq n-4$ et $\varepsilon(r) \underset{r\to 0}{\to} 0$.*
2. *Soit $\exp_x$ la fonction exponentielle de (M, g) en x. Alors il existe $s = s(n) \in]0, 1/2[$ tel que $d(x, x_1) \geq sr$ et $d(x_k, \exp_x(V_{k-1})) \geq sr$ pour $k \geq 2$ avec*

$$V_{k-1} = Vect\left(\left(\exp_x|_{B_r(0)}\right)^{-1}(x_1), ..., \left(\exp_x|_{B_r(0)}\right)^{-1}(x_{k-1})\right)$$

L'espace tangent en la mesure μ en a peut être très riche, en contenant toutes sortes de mesures différentes. Néanmoins, ici, nous allons voir que nous bénéficions d'une sorte d'unicité de la mesure tangente.

Théorème 7 *Soit encore $\mu = |F_A|^2 dV_g + \nu$. Alors pour H^{n-4}-presque tout $x \in S_b \subset M$, toute mesure de cône η sur T_xM de μ est de la forme $\Theta(\mu, x)H^{n-4}|_F$ où F est un sous-espace de T_xM de dimension $(n-4)$. Les cônes tangents en x peuvent être vus comme des sous-espaces de dimension $(n-4)$ dans T_xM.*

On sait que souvent les problèmes variationnels admettent des solutions qui sont des espaces m-rectifiables et non lisses, c'est à dire des espaces $E \subset \mathbb{R}^n$ tels qu'ils existent $m \in \mathbb{N}$, des applications $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ lipschitziennes vérifiant

$$H^m\left(E \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} f_i(\mathbb{R}^n)\right) = 0$$

L'ensemble F sera dit purement irrectifiable si $H^m(E \cap F) = 0$ pour tout espace E m-rectifiable. L'objet de l'étude suivante est de montrer que S_b est $n-4$ rectifiable, c'est à dire que les cônes tangents non seulement existent mais sont uniques pour H^{n-4}-presque tout $x \in S_b$ de par le théorème 15.19 de Mattila [16].

Soit alors $S_b = S_u \cup S_r$ avec S_u ensemble purement irrectifiable. Soit par ailleurs P_V la projection orthogonale de T_xM sur $V \in G(T_xM, n-4)$. Tout revient en fait à montrer que pour toute suite (λ_k) convergeant vers 0,

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \frac{H^{n-4}(P_V(\exp_x^{-1}(S \cap B_{\lambda_k}(x))))}{\lambda^{n-4}} > 0$$

(Il est intéressant à cet instant de regarder le travail de Lin [14]).

Proposition 2.5 *Soit (S_b, Θ) le lieu d'éclatement d'une suite faiblement convergente $\{A_i\}$ de connexions Yang-Mills admissibles. Alors son support S_b est H^{n-4} rectifiable et en particulier, pour H^{n-4}-presque tout $x \in S_b$, il existe un unique sous-espace tangent $T_xS_b \subset T_xM$.*

2.4 Connexions de Yang-Mills bouillonnantes

Soit $\{A_i\}$ une suite de connexions admissibles de Yang-Mills convergeant vers une connexion de Yang-Mills admissible avec le lieu de l'éclatement (S, Θ). Nous allons maintenant essayer d'appréhender la structure de A_i près de S_b lorsque i est grand. Nous construirons une nouvelle connexion sur $\mathbb{R}^n$ lorsque A_i s'approche de A.

Proposition 2.6 *Soit $x \in S_b = S$ qui satisfait les consditions suivantes :*
1. *Le plan tangent $V = T_xS \subset T_xM$ existe de façon unique,*
2. *$\Theta(\mu, x) \geq \varepsilon_0 > 0$ et $r^{4-n} \int_{B_r(x)} |F_A|^2 dV_g \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0$*

Alors il existe des transformations linéaires $\sigma_i : T_xM \to T_xM$ telle qu'une sous-suite de $\sigma_i^* \exp_x^* A_i$ converge vers une connexion de Yang-Mills B sur T_xM avec $F_B \neq 0$ et $v \rfloor F_B = 0$ pour tout $v \in V$. Une telle connexion B est appelée une connexion bouillonnante en $x \in S_b$.

Nous nous donnons maintenant une suite $\{A_i\}$ d'instantons $\Omega - asd$ (Ω-anti-auto-duaux) qui converge vers un instanton $\Omega - asd$, Ω étant une forme sur M de degré $n-4$. Soit S toujours le lieu d'éclatement de la suite $\{A_i\}$. Nous allons voir qu'en fait Ω se réduit à une forme de volume sur S.

Théorème 8 *Soit $\{A_i\}$ une suite d'instantons $\Omega - asd$ avec Ω une forme sur (M, g) variété riemannienne compacte, qui soit fermée de degré $n-4$. Alors, quitte à extraire une sous-suite, A_i converge vers un instanton $\Omega - asd$ avec (S, Θ) comme lieu d'éclatement tel que :*

1. *S est rectifiable et $\Omega_{|S}$ est une des formes de volumes induites par la métrique g,*
2. *$\frac{1}{8\pi^2}\Theta$ est à valeur entière,*
3. *Soit le courant $C_2(S, \Theta)(\phi) := \frac{1}{8\pi^2} \int_S (\phi, \Omega_{|S}) \Theta d(H^{n-4}_{|S})$ où ϕ est une forme lisse quelconque à support compact dans M. Alors $C_2(S, \Theta)$ est fermé et l'on a même*

$$\lim_{i\to\infty} C_2(A_i) = C_2(A) + C_2(S, \Theta)$$

Soit (M, g) une variété riemannienne et Ω une forme fermée de degré $n-4$. Nous supposons que pour tout $x \in M$, et F sous-espace de T_xM de codimension 4, $\Omega_{|F} \leq dV_F$ avec V_F la forme de volume induite par g. Nous dirons que (F, dV_F) est calibrée par Ω si $\Omega_{|F} = dV_F$. *De* plus, si $\Phi = (S, \xi, \Theta)$ est un courant intégral d'orientation ξ, de densité Θ, de support S et rectifiable, alors nous dirons que Φ est Ω-rectifiable si $(T_xS, \xi(x))$ est calibrée par Ω pour H^{n-4}-presque tout $x \in S$. On dira aussi que (S, Θ) est un cycle Ω-calibré. Les résultats de la théorie de la mesure assurent que pour un tel cycle, S est régulier dans un sous-ensemble ouvert dense. Nous disposons même du théorème suivant :

Théorème 9 *Soit $\{A_i\}$ une suite d'instantons $\Omega - asd$ avec Ω une forme sur (M, g) variété riemannienne compacte, qui soit fermée de degré $n-4$ et calibrée. Alors, quitte à extraire une sous-suite, A_i converge vers un instanton $\Omega - asd$ avec (S, Θ) comme lieu d'éclatement tel que (S, Θ) est un Ω-cycle calibré et*

$$\lim_{i \to \infty} C_2(A_i) = C_2(A) + C_2((S, \Theta))$$

Conjecture 1 *Le lieu d'éclatement d'une connexion de Yang-Mills admissible est une variété minimale c'est à dire une variété sans bord avec courbure moyenne nulle.*

Une connexion A est stationnaire si pour tout champ de vecteurs X à support compact dans M, on a :

$$\int_M \left(|F_A|^2 divX - 4 \sum_{i,j=1}^{n} (F_A(\nabla_{e_i} X, e_j), F_A(e_i, e_j)) \right) dV_g = 0$$

où e_i est une base orthonormale de M. Remarquons que toute connexion lisse de Yang-Mills est stationnaire.

Proposition 2.7 *Si A est stationnaire, alors S est une variété minimale et ainsi la conjecture précédente est vérifiée.*

Proposition 2.8 *Soit A un instanton admissible $\Omega - asd$, Ω étant une forme fermée de degré $n-4$. Alors A est stationnaire.*

2.5 Singularités apparentes pour les connexions de Yang-Mills

Nous nous intéressons dorénavant aux connexions admissibles de Yang-Mills. Nous allons généraliser le travail d'Uhlenbeck (Cf [23],[24]) qui a en fait décrit ce qui se passe en l'infini en dimension 4 pour une suite de connexions anti-auto-duales et a donné un contrôle des voisinages de l'infini via le théorème :

Théorème 10 *Soit M une variété riemannienne de dimension 4 compacte, sans-bord, et orientée et soit $P \to M$ un fibré principal de groupe $SU(2)$ avec $c_2(P) = k > 0$. Soit $\{A_i\}_i$ une suite de connexions anti-auto-duales d'action finie sur P. Alors, il y a une sous-suite pour laquelle :*
$\triangleright$ *il existe un $SU(2)$-fibré principal $P' \to M$ avec $0 \leq c_2(P') = k' \leq k$*
$\triangleright$ *il existe des points $\{x_1, ..., x_t\}$ dans M*

$\triangleright$ *il existe des entiers naturels* $\{m_1, ..., m_t\}$
$\triangleright$ *il existe une connexion anti-auto-duale* A' *sur* P'
$\triangleright$ *il existe des isomorphismes* $\sigma_i : P'_{|M\backslash\{x_1,..,x_t\}} \to P_{|M\backslash\{x_1,...,x_t\}}$ *qui sont* W_3^2 *sur tout sous-ensemble compact* $K \subset M\backslash\{x_1, ..., x_t\}$
et que l'on ait :
$\to$ *Pour tout sous-ensemble compact* $K \subset M\backslash\{x_1, ..., x_k\}$ *les connexions* $\sigma_i^*(A_{i|K})$ *convergent dans* $W_2^2(K)$ *dans* $A'_{|K}$
$\to$ *Les fonctions* $|F_{A_i}| \in L^1(M)$ *convergent faiblement vers la mesure* $|F_{A'}|^2 + \sum_{i=1}^t 8\pi^2 m_i \delta_{x_i}$ *avec* $t \leq k$ *et* δ_x *la* δ*-masse en* x *de masse 1.*

▶ La démonstration repose essentiellement sur deux points : tout d'abord sur des estimations de la courbure, et plus précisément si $B_r \subset M$ est une géodésique de rayon r petit et que B'_r est une boule concentrique de rayon inférieur, sur le fait qu'ils existent des constantes universelles $\varepsilon > 0$ et C telles que si A est une W_2^2-connexion sur le fibré P, avec A_0 une connexion C^∞ sur B_r, et que l'on ait en plus $||F_A||_{L^2(B_r)} \leq \varepsilon$, alors il existe une transformation de jauge σ sur P telle que :

$$||\sigma^* A - A_0||_{W_1^2} \leq C||F_A||_{L^2}$$

et

$$D^*_{A_0}(\sigma^* A - A_0) = 0$$

De plus, A anti-auto-duale sur $P \to B_r$ infère $\sigma^* A$ lisse et l'estimation complémentaire :

$$||\sigma^* A - A_0||_{W_3^2(V')} \leq C||F_A||_{L^2(V)}$$

Ce premier point permet de voir que sous certaines bonnes conditions pour les courbures des A_i et lorsque la suite A_i est *asd* sur une petite boule, alors il y a convergence vers un voisinage plus petit quitte à utiliser des transformations de jauge.

Le deuxième point concerne les singularités : si A est *asd* sur le fibré principal P_o sur une boule avec des points singuliers B_S, et qu'elle est d'action finie sur tout sous-ensemble compact de B_S, alors il existe une extension de P_o à un fibré principal P sur la boule entière et une extension de A en une connexion *asd* d'action finie sur P tout entier. ■

On se place sur M ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni d'une métrique g non plate.

Théorème 11 *Soit* A *la limite d'une suite de connexions de Yang-Mills* A_i *lisses en dehors de* S*. Alors il existe* $\varepsilon > 0$ *dépendant seulement de* $n = \dim M$ *tel que pour tout* $p \in S$*, et* $0 < r < r_p$*, si*

$$r^{4-n} \int_{B_r(p)} |F_A|^2 dV_g < \varepsilon$$

alors il y a une transformation de jauge σ *tel que* $\sigma(A)$ *s'étende en une connexion lisse au voisinage de* p*. La connexion* $\sigma(A)$ *est lisse en dehors d'un sous-ensemble fermé*

$$S([A]) := \{x \in M | \lim_{r \to 0} r^{4-n} e^{ar^2} \int_{B_r(x)} |F_A|^2 dV_g \geq \varepsilon\}$$

de H^{n-4}*-mesure nulle.*

La démonstration de ce résultat est technique, reposant principalement sur l'utilisation de la formule de la monotonie et la majoration de la courbure de la connexion sur $B_1(p)$ ainsi que des propriétés d'harmonicité.

Remarquons que si A est une connexion de Yang-Mills stationnaire sur M d'action finie, alors le dernier théorème assure que $S(A) \supset S([A])$. Supposons que l'on ait $S(A) = S([A])$. Dans ces conditions, nous allons analyser la connexion A au voisinage d'un point x. On définit $g_\lambda = \lambda^{-2} g$ et $A_\lambda = \tau_\lambda^* \exp_x^* A$ avec $\tau_\lambda : \substack{T_x M \to T \\ v \mapsto \lambda v}$ pour $\lambda \in]0,1[$. Bien sûr, on vérifie que A_λ est aussi une connexion de Yang-Mills stationnaire pour la métrique g_λ et que

$$R^{4-n} \int_{B_R(x,g_\lambda)} |F_{A_\lambda}|^2 dV_{g_\lambda} = (\lambda R)^{4-n} \int_{B_{\lambda R}(x)} |F_A|^2 dV_g$$

qui est une quantité bornée.

Ainsi, si $(\lambda(i))_i \in]0,1[^{\mathbb{N}}$ est une suite tendant vers 0, alors $A_{\lambda(i)}$ converge (modulo extraction et transformations de jauges) vers une connexion de Yang-Mills A^c pour la métrique plate en dehors de $S(A^c) \subset T_x M$, avec $H^{n-4}(S(A^c) \cap B_R(0, g_0)) = 0$ appelée connexion tangente.

De plus un simple calcul montre que $|F_{A_{\lambda(i)}}|^2 dV_g \to |F_{A^c}|^2 dV_{g_0} + \Theta_c H^{n-4}|_{S(A^c)}$ qui est une mesure cône. Dans le cas où $S(A^c) = \emptyset$ alors x est une singularité isolée de A. Si l'on se place sur $\mathbb{R}^6$ on voit qu'une connexion A^c est le pull-back d'une connexion A sur $\mathbb{CP}_2$ et que la réciproque est aussi vraie.

En fait, tout le problème des singularités d'une connexion A est de savoir comment se comporte la suite $S(A_i)$ et en particulier de voir si $\lim_{i \to \infty} S(A_i) \subset S(A)$ et l'approche de G. Tian est d'introduire les connexions tangentes. Dans le cas particulier d'une connexion A qui soit Ω-anti-auto-duale, on peut prouver par le théorème n°11 que $H^{n-5}(S([A^c])) = 0$. Ainsi il est naturel de conjecturer que :

Conjecture 2 *Si A est $\Omega - asd$, $S([A])$ est de codimension au moins 6.*

2.6 Compactification des espaces de modules de connexions anti-auto-duales

Soit (M, g) une variété riemannienne compacte de dimension n, et Ω une forme de degré $n-4$. Soit E un fibré vectoriel unitaire sur M et $\mathcal{M}_{\Omega,E}$ les classes d'équivalence d'instantons $\Omega - asd$ sur M. Un $\Omega - asd$ instanton généralisé est construit à partir de :

- Un $\Omega - asd$ instanton admissible A sur E qui s'étend en une connexion lisse sur $M \backslash S(A)$ avec $S(A)$ espace singulier qui est un ensemble fermé vérifiant $H^{n-4}(S(A)) = 0$.
- Un courant intégral $C = (S, \Theta)$ calibré par Ω et qui satisfait l'identité d'énergie

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_M |F_A|^2 dV_g + \int_S \Theta dH^{n-4} = \int_M Ch_2(E) \wedge \Omega$$

où $Ch_2(E)$ est le second caractère de Chern de E.

On appellera $\overline{\mathcal{M}_{\Omega,E}}$ l'ensemble des classes d'équivalence d'instantons $\Omega - asd$ généralisés et l'on peut associer à cet espace, grâce à l'ensemble du travail effectué, une topologie pour le rendre compact : $[A_i, C_i]$ converge vers $[A, C]$ si

1. $C = C' + C''$ avec C', C'' courants intégraux tels que C_i converge vers C'
2. Ils existent des transformations de jauge σ_i tels que

$$\sigma_i(A_i) \to A$$

en dehors de $S(A)$ et du support de C et que

$$Ch_2(\sigma_i(A_i), C_i) \to Ch_2(A, C)$$

où

$$Ch_2(A, C) = Ch_2(A) + PD(C) = \frac{-1}{4\pi^2} tr(F_A \wedge F_A) + PD(C)$$

est un courant fermé sur M généralisant la seconde classe de Chern et $PD(C)$ est le dual au sens de Poincaré du courant intégral C.

Le programme de G. Tian est maintenant d'étudier la lissité de $\overline{\mathcal{M}_{\Omega,E}}$ pour un bon choix de la $(n-4)$-forme Ω afin de définir de nouveaux invariants du type Donaldson ou Seiberg-Witten.

2.7 Applications aux espaces Calabi-Yau

Soit $T_p(M)$ l'espace tangent en p, et soit une courbe fermée qui passe par p. Une base en p donnera par transport parallèle le long de cette courbe une autre base. Cette nouvelle base est une transformation linéaire de l'ancienne base et le transport parallèle de la base n'est autre que l'application d'un automorphisme de l'espace tangent $T_p(M)$. L'ensemble de ces automorphismes de $T_p(M)$ constitue un groupe appelé le groupe d'holonomie $Hol(\omega)$ de connexions en p pour la variété de Kähler (M, ω). C'est un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$. Si le groupe d'holonomie de la variété peut être réduit à un sous-groupe G de $GL(n, \mathbb{R})$ (comme par exemple dans le cas de variétés connexes) alors on dit de la variété que c'est une G-structure. Si le groupe d'holonomie est réduit à un élément, on dit que la variété est parallélisable (Exemple : S^1, S^3, S^7).

Une variété Calabi-Yau M est une variété kählerienne compacte de dimension supérieure ou égale à 2 avec $Hol(\omega) = SU(m)$. Toute variété de Calabi-Yau est Ricci-plate et répond à la conjecture de Calabi résolue par Yau. Remarquons que, de la manière dont est reliée la première classe de Chern au tenseur de Ricci, nous avons aussi $c_1(M) = 0$. Pour une variété complexe de dimension n, le fait que $c_1(M) = 0$ infère qu'il existe une unique n-forme qui n'a pas de singularités et qui ne s'annule jamais. Les variétés complexes sous-jacentes aux variétés Calabi-Yau sont des objets algébriques et il est naturel de les étudier avec des méthodes de géométrie algébrique complexe.

Soit M une variété Calabi-Yau de dimension 4, de métrique de Kähler ω et une $(4,0)$-forme holomorphe θ normalisée : $4\left(\theta \wedge \bar{\theta}\right) = \omega$. Choisissons la forme parallèle

$$\Omega = 2(\theta + \bar{\theta}) + \frac{1}{2}\omega^2$$

et soit h une métrique hermitienne du fibré unitaire de rang r, $\pi : E \to M$.

A sera dit un instanton complexe anti-auto-dual associé à (E, h) si l'on a $D_A h = 0$, $tr(F_A)$ harmonique et bien sûr $\Omega \wedge \left(F_A - \frac{1}{r} tr(F_A) Id\right) = - * \left(F_A - \frac{1}{r} tr(F_A) Id\right)$. Dans ces conditions, on dispose de la proposition :

Proposition 2.9 *Soit A un instanton complexe anti-auto-dual. Soit θ telle que*

$$[\theta] \wedge \left(2C_2(E) - \frac{r-1}{r}C_1(E)^2\right) \geq 0$$

où $[\theta] \in H^4(M,\mathbb{C})$ est bien sûr la classe de cohomologie de θ.
Alors $YM(A)$ est le minimum absolu de la fonctionnelle de Yang-Mills et $YM(A)$ ne dépend que des variables $[\omega], [\theta]$ et E.

Une variante de ce résultat dans les cas des $Spin(7)$ et G_2 variétés est donné par la proposition suivante :

Proposition 2.10 *Soit (M,g) une variété $Spin(7)$ (ou G_2) et Ω est une 4-forme parallèle (resp 3-forme). Soit A un $\Omega -$ asd instanton. Alors $YM(A)$ ne dépendent que de M et de E, soit :*

$$YM(A) = \left(2C_2(E) - \frac{r-1}{r}C_1(E)^2\right) \cdot [\Omega] + \frac{1}{4r\pi^2}\int_M |tr(F_A)|^2 dV_g$$

Revenons au cas d'une variété Calabi-Yau de dimension 4, où $\Omega = 2(\theta + \bar{\theta}) + \frac{1}{2}\omega^2$. Un calcul simple sur $\mathbb{C}^4$ montre que :

Proposition 2.11 *Soit $L \subset TM$ un sous-espace de dimension 4. Alors $\Omega_{|L} \leq dV_L$*

Définition 2.7.1 (S,Θ) *est un cycle de Cayley s'il est calibré par Ω et dans ce cas pour H^4-presque tout $x \in S$, l'espace tangent T_xS est un plan de Cayley dans T_xM c'est à dire que $\Omega_{|TM} = dV_{|TM}$.*

Proposition 2.12 *Soit (S,Θ) un cycle de Cayley.*
Alors $C_2(S,\Theta)[\theta] \geq 0$ et $C_2(S,\Theta)[\theta] = 0$ si et seulement si (S,Θ) est un cycle holomorphe.

Théorème 12 *(M,g) une variété compacte Calabi-Yau de dimension 4 avec forme de Kähler ω et une $(4,0)$-forme holomorphe θ. Soit $\{A_i\}$ une suite d'instantons complexes asd. Alors, quitte à prendre une sous-suite, A_i converge vers un instanton complexe complexe asd de lieu d'éclatement (S,Θ) tel que (S,Θ) est un cycle Cayley et*

$$\lim_{i\to\infty} C_2(A_i) = C_2(A) + C_2(S,\Theta)$$

Soit maintenant M variété compacte de dimension 8 réelle qui admet une structure Calabi-Yau, c'est à dire une, structure complexe J, une métrique de Kähler g compatible avec J et une forme holomorphe θ satisfaisant $4\left(\theta \wedge \bar{\theta}\right) = \omega^4$ pour $\omega = \omega_g$ la forme de Kähler de g. Nous notons $\mathcal{M}'$ l'espace des modules de toutes les structures Calabi-Yau. Soit E un $U(r)$-fibré sur la variété M et

$$\mathcal{M}(E) = \left\{(J,g,\theta) \in \mathcal{M}' | \left(2C_2(E) - \frac{r-1}{r}C_1(E)^2\right) \cdot [\theta] \geq 0 \text{ et } \left(2C_2(E) - \frac{r-1}{r}C_1(E)^2\right) \cdot [\omega_g^2] \geq 0\right\}$$

L'espace $\mathcal{M}(E)$ est une variété analytique connexe. Notons $\mathcal{Y}_{(J,g,\theta)}(E)$ l'espace des modules de toutes les connexions anti-auto-duales de E sur la variété Calabi-Yau M de structure (J,g,θ) modulo transformations de Jauge. Alors, on peut définir grâce au théorème n°12, l'espace compactifié

$$\overline{\mathcal{Y}_{(J,g,\theta)}(E)} = \left\{ (A,S,\Theta) \;\middle|\; \begin{array}{l} A \text{ est un instanton complexe asd sur } M \\ (S,\Theta) \text{ est un cycle Cayley} \\ C_i(E) = [C_i(A)] + [C_i(S,\Theta)] \in H^{2i}(M,\mathbb{R}) \text{ pour } i = 1,2. \end{array} \right\}$$

De plus on pose, $\overline{\mathcal{Y}(E)} = \bigcup_{(J,g,\theta)\in\mathcal{M}'} \overline{\mathcal{Y}_{(J,g,\theta)}(E)}$. D'après la proposition n°2.12, il y a une inclusion $f_c : \overline{\mathcal{Y}(E)} \hookrightarrow \mathcal{M}(E)$ et le théorème n°12 assure que $\mathcal{M}_c(E) := f_c\left(\overline{\mathcal{Y}(E)}\right)$ est un fermé de $\mathcal{M}(E)$.

Conjecture 3 *$\mathcal{M}_c(E)$ est une sous-variété analytique de $\mathcal{M}(E)$.*

Remarque 4 *Il conviendrait à ce niveau de regarder si l'on ne peut pas se ramener à un théorème de Siu ("Analycity of sets associated to Lelong numbers...", Invent. Math., 27, 53-156) en étudiant le nombre de Lelong d'un courant positif fermé.*

3 Perspective algébrique

Nous cherchons à donner une interprétation algébro-géométrique du travail de G. Tian en gardant à l'esprit qu'il y a une correspondance par le théorème de Donaldson-Uhlenbeck-Yau entre les connexions irréductibles Hermite-Einstein et les fibrés stables que nous avons déjà décrite dans la première section et dans un cas particulier. Si nous disposons d'une suite de fibrés W-stables V_i sur X de topologie fixée, nous pensons que nous aurons besoin d'un unique éclatement $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ donné par des méthodes de G.I.T dans le cas d'une variété algébrique tel que $\pi^* V_i$ converge vers un fibré V qui soit au moins polystable (ou quasi-stable) par rapport à un fibré ample de la forme $W_\varepsilon = W - \sum_j \varepsilon_j E_j$ où E_j désigne un diviseur exceptionnel associé à π. L'ensemble des points où l'on éclaterait serait quant à lui en correspondance avec l'ensemble singulier qu'a défini G. Tian et pour lequel il a donné une description géométrique que nous avons rappelé dans la section 2. Le point de vue algébrique permettrait dans ces conditions de mieux comprendre la nature de l'ensemble singulier et de répondre en particulier aux conjectures de G. Tian (Cf conjecture 2). Nous espérons que nous pourrons trouver une connexion Hermite-Einstein A_ε associée à E vis à vis de W_ε pour laquelle $A^i_\varepsilon \to A_\varepsilon$ fortement avec A^i_e suite de connexions Hermite-Einstein associée à la suite $(V_i)_i$. L'étude de la limite de A_ε quand $\varepsilon \to 0$ devrait nous donner une compactification naturelle de l'espace de modules de fibrés stables $\mathfrak{M}(r, c_1, c_2)$. Dans un premier temps nous nous restreignons au cas d'une surface algébrique où nous étudions le comportement de l'espace de modules vis à vis d'un éclatement.

3.1 Riemann-Roch et théorème d'indice de Hodge

Nous redonnons succintement dans ce paragraphe quelques résultats classiques de géométrie algébrique dans le cas d'une surface algébrique X arbitraire. Par définition, la caratéristique d'Euler d'un diviseur D sur cette surface X est :

$$\chi(D) := \chi(\mathcal{O}(D)) = h^0(X, \mathcal{O}(D)) - h^1(X, \mathcal{O}(D)) + h^2(X, \mathcal{O}(D))$$

Le théorème de Riemann-Roch et la formule de Noether peuvent s'énoncer ainsi :

$$\chi(D) = \frac{D^2 - D \cdot K}{2} + \chi(\mathcal{O}_X)$$

$$\chi(\mathcal{O}_X) = \frac{K^2 + e(X)}{12}$$

avec $e(X) = \Sigma_i (-1)^i b_i$ la caractéristique d'Euler de la surface X. Comme l'usage le veut, on notera $l(D) = h^0(X, \mathcal{O}(D))$ et $K = K_X$ la classe canonique de la surface X. Par dualité, on obtient l'inégalité de Riemann-Roch :

$$l(D) + l(K - D) \geq \frac{D^2 - D \cdot K}{2} + \chi(\mathcal{O}_X)$$

On dispose alors immédiatement du résultat suivant :

Proposition 3.1 *Si $D^2 > 0$, alors un des diviseurs, nD ou $-nD$, est équivalent à un diviseur effectif pour n suffisamment grand.*

▶ En remplacant D par nD et $-nD$ dans l'inégalité de Riemann-Roch, on voit qu'à la limite on obtient 3 possibilités :

1. $l(nD) \to \infty$
2. $l(-nD) \to \infty$
3. $l(K-nD) \to \infty$ et $l(K+nD) \to \infty$

puisqu'il est évident que si W est un diviseur ample sur X, alors il existe $n_0 = K \cdot W$ tel que pour tout diviseur D avec $D \cdot W > n_0$ alors $l(K-D) = 0$. Maintenant montrons que la condition (3.) entraine une contradiction : pour n assez grand, on obtient $K - nD \sim D_0 > 0$ et pour $D' > 0$ et $D' \sim K + nD$, l'application $D' \to D' + D_0$ donne l'inclusion suivante : $H^0(X, \mathcal{O}(K+nD)) \to H^0(X, \mathcal{O}(K+nD+K-nD)) = H^0(X, \mathcal{O}(2K))$.
Dès lors $l(2K) \geq l(K+nD)$ ce qui est absurde. En fait le choix de nD ou de $-nD$ dépend du signe de $D \cdot W$. ■

Théorème 13 ***(Théorème d'Indice de Hodge)***
Soit W diviseur ample sur X, et soit $D \neq 0$ diviseur tel que $D \cdot W = 0$. Alors $D^2 < 0$.

▶ Si l'on a $D^2 > 0$, alors soit $W' = D + nW$ qui est ample pour n suffisamment grand. De plus, $D \cdot W' > 0$ donc la dernière proposition donne mD effectif pour tout m assez grand et $D \cdot H > 0$ ce qui absurde. Dans le cas où $D^2 = 0$, il existe un diviseur E tel que $D \cdot E \neq 0$ et $W \cdot E = 0$. On remplace E par $E' = (W^2)\, E - (E \cdot W)\, W$ et D par $D' = nD + E$. Alors $D' \cdot W = 0$ et $D'^2 = 2nD \cdot E + E^2$ et il existe n assez grand tel que $D'^2 > 0$ et on se ramène au cas précédent. ■

Corollaire 3.1 *Soit W diviseur ample sur X et soit D un diviseur. Alors,*

$$\left(W^2\right)\left(D^2\right) \leq (W \cdot D)^2$$

▶ Il suffit d'appliquer le théorème au diviseur $(W^2)\, D - (W \cdot D)\, W$. ■

3.2 Fibrés stables et éclatements

Regardons maintenant comment se comporte l'espace des modules de fibrés stables afin de répondre au moins partiellement au programme que nous nous sommes fixés au début de cette section.

Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement d'une surface algébrique X en un point p, E le cycle exceptionnel associé. Nous identifierons par la suite un diviseur D sur X avec $\pi^* D$ sur $\tilde{X}$. Chaque diviseur $\tilde{D}$ sur $\tilde{X}$ est linéaire équivalent à $D + aE$ où la classe d'équivalence du diviseur D sur X est l'entier relatif a sont uniquement déterminés par $\tilde{D}$. Si W est un diviseur ample sur Y, alors $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $nW - E$ est ample.

Lemme 3.1 *Soient $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement de X en p, E le diviseur exceptionnel et $\mathfrak{m}_p$ l'idéal maximal de p dans X. Alors,* $\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE) = \left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{m}_p^{-a}, \ \textit{si } a < 0 \\ \mathcal{O}_X \ \textit{si } a \geq 0 \end{array} \right.$.

▶ Pour un voisinage U de p, soit $f \in \Gamma(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE))$ qui définit une fonction holomorphe sur $U\backslash\{p\}$. Le théorème d'Hartogs permet de l'étendre à U tout entier d'où l'inclusion naturelle $j : \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE) \to \mathcal{O}_X$.
Montrons que dans le cas où $a \geq 0$, nous disposons de l'inclusion inverse. Si maintenant $a \geq 0$ et $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ alors π^*g est une section de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ sur $\pi^{-1}(U)$ et donc une section de $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)$ sur $\pi^{-1}(U)$, c'est à dire une section de $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)$ sur U. On a $j(\pi^*g) = g$ et donc $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE) = \mathcal{O}_X$.
Dans le cas où $a < 0$, nous devons déterminer l'image de l'application j. Il suffit de montrer que $\{g \text{ holomorphe sur } U \text{ telle que } \pi^*g \in \mathcal{O}_{\tilde{X}}(aE)\} = \mathfrak{m}_p^{-a}$. On choisit un système de coordonnées x, y centré en p, et dans ces conditions l'on peut écrire $(x, y) \longmapsto g\,(x, y)$ sous la forme $g(x, y) = \sum_{k=m}^{\infty} g_k(x, y)$ avec g_k homogène de degré k et $g_m \neq 0$. On a tout de suite que $m = mult_p(g)$ et $g \in \mathfrak{m}_p^m - \mathfrak{m}_p^{m+1}$. Soit $\tilde{U} = \pi^{-1}(U)$ qui est recouvert par deux cartes $\tilde{U}_1$ et $\tilde{U}_2$. Sur $\tilde{U}_1$ nous disposons de coordonnées x', y' et π est donnée par $\{x = x', y = x'y'\}$. Sur la carte $\tilde{U}_2$, notons x'', y'' les coordonnées, π étant alors donnée par : $\{x = x''y'', y = y''\}$. On recolle $\tilde{U}_1\backslash\{y' = 0\}$ à $\tilde{U}_2\backslash\{x'' = 0\}$ via $\{x'' = 1/y',\ y'' = x'y'\}$. Dès lors, en travaillant dans $\tilde{U}_1$, nous obtenons :

$$\pi^*g(x, y) = g(x', x'y') = (x')^m\,(g_m(1, y') + x'g')$$

et $x'g'$ s'annule tout le long de $E_{|\tilde{U}_1} = \{x' = 0\}$, contrairement à $g_m(1, y')$. Ainsi,

$$\pi^*g \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-mE)\right)\backslash\Gamma\left(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-(m+1)E)\right)$$

et l'on a l'équivalence

$$\pi^*g \in \Gamma\left(\pi^{-1}(U), \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-mE)\right) \Leftrightarrow g \in \mathfrak{m}_p^m$$

ce qui permet de conclure. ■

Lemme 3.2 *Si W est un diviseur très ample, alors $nW - E$ est ample si $n \geq 2$.*

▶ Rappelons le critère de Nakai-Moishezon : un diviseur D sur X est ample si et seulement si $D^2 > 0$ et $D \cdot C > 0$ pour toutes les courbes irréductibles C de X. On a bien sûr $(nW - E)^2 > 0$. Toute courbe C est éclatée en p et s'écrit $\tilde{C} = C - kE$ avec $k \geq 0$ (sauf pour $C = E$ qui est un cas trivial) et comme W est très ample on a $W \cdot C \geq mult_p(C) \geq k$. Ainsi, $(nW - E) \cdot \tilde{C} = nW \cdot C - k \geq (n-1)k > 0$. ■

Proposition 3.2 *Soit $\tilde{V}$ un fibré de rang 2 sur $\tilde{X}$ avec $c_1(\tilde{V}) = 0$ et W diviseur très ample sur X tel que $V = \left(\pi_*\tilde{V}\right)^{\vee\vee}$ soit W-stable. Alors, il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1(W, ch(\tilde{V}))$, le fibré $\tilde{V}$ soit $nW - E$ stable.*

▶ Soit $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D}) \to \tilde{V}$ un sous-fibré en droite, c'est à dire un sous-faisceau de rang 1 qui soit fibré en droite. Nous pouvons écrire alors $\tilde{D} = \pi^*D + aE$ pour un unique $a \in \mathbb{Z}$.

– Supposons que $a = -n \leq 0$. Comme pour tout entier $p \geq 0$, $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{X}}(pE) = \mathcal{O}_X$ par le lemme, nous avons, via la formule de projection, une suite d'injections que nous pouvons formuler ainsi :

$$\pi_*(\pi^*\mathcal{O}_X(D) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-nE)) = \mathcal{O}_X(D) \otimes \mathfrak{m}_x^n \to \pi_*\tilde{V} \to V$$

avec toujours m_x l'idéal maximal de x dans X. Le fait que V soit stable se traduit par définition par $W \cdot D < 0$. Mais alors, tout simplement, $(nW - E) \cdot (D + aE) = n(W \cdot D) + a < 0$, ce qui prouve immédiatement que $\tilde{V}$ est stable.

- Supposons maintenant que $a > 0$. En considérant $\tilde{V}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D})$ sans torsion (Cf proposition n°1.1), nous disposons de la suite exacte :

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D}) \to \tilde{V} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(-\tilde{D}) \otimes I_Z \to 0$$

  où Z est sous-schéma de dimension 0. Ainsi, $c_2(\tilde{V}) \geq -(\tilde{D})^2 \geq -D^2 + a^2$.
  Examinons les 3 différents sous-cas suivants :
- $a > 0$ et $D^2 \leq 0$. Alors $a^2 \leq c_2(\tilde{V})$ et si l'on prend $n_0 := \sqrt{2c_2(\tilde{V}) + 1}$, alors $\forall n \geq n_0$, $n > a$ et $(W \cdot D) \leq -1$, $n(W \cdot D) + a \leq -n + a < 0$ ce qui prouve la stabilité.
- $\sqrt{2c_2(\tilde{V}) + 1} > a > 0$ et $D^2 > 0$. Alors, $\forall n \geq n_0$, $n(W \cdot D) + a < 0$ et il y a encore stabilité.
- $a \geq \sqrt{2c_2(\tilde{V}) + 1}$ et $D^2 > 0$. Soit $n_0'(W)$ telle que $\forall N \geq n_0'$, $(NW - E)$ soit ample (Cf lemme n°3.2). Considèrons les nombres entiers N tels que $N \geq 3n_0'$ et $N \geq n_0$. On peut écrire $(D + aE) \cdot (NW - E) = \left(\frac{N}{n_0'}D + aE\right) \cdot (n_0'W - E)$. Alors

$$\left(\frac{N}{n_0'}D + aE\right)^2 \geq \frac{N^2}{n_0'^2}D^2 - 4a^2 \geq \frac{N^2}{n_0'^2}c_2(\tilde{V}) + \left(\frac{N^2}{n_0'^2} - 4\right) - 8c_2(\tilde{V}) > 0$$

  On utilise la proposition n°3.1, et comme, $\left(\frac{N}{n_0'}D + aE\right) \cdot W < 0$ par hypothèse, on obtient qu'il existe $n_0'' \gg 0$ tel que $-n_0''\left(\frac{N}{n_0'}D + aE\right)$ est équivalent à un diviseur effectif. Vu que par choix de n_0', $(n_0'W - E)$ est ample, on obtient que $\left(\frac{n}{n_0'}D + aE\right) \cdot (n_0'W - E) = n(W \cdot D) + a < 0$, $\forall n \geq \max(3n_0', n_0)$. En posant $n_1 := \max(3n_0', n_0)$ le résultat est acquis. ■

Remarque 5 *La dernière proposition se généralise au cas où l'éclatement se fait en plusieurs points simultanément.*

Proposition 3.3 *Soit $\pi : \tilde{X} \to X$ l'éclatement en un nombre fini de points $\{p_1, ..., p_q\}$ et E_i les diviseurs exceptionnels associés. Soit $\tilde{V}$ un fibré de rang 2 sur X et W diviseur très ample sur X tel que $V = \left(\pi_*\tilde{V}\right)^{\vee\vee}$ soit W-stable. Alors, il existe n_1 tel que $\forall n \geq n_1(W, ch(\tilde{V}))$, le fibré $\tilde{V}$ soit $nW - \sum_{i=1}^q E_i$ stable.*

► On commence par reprendre la même démonstration que dans le cas où $c_1(\tilde{V}) = 0$. On pose $c_1(\tilde{V}) = \pi^* c_1 + \Sigma_i c_i E_i$ et $C(V) = 4c_2 - c_1^2$ la charge de V. Soit $\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D}) \to \tilde{V}$ un sous-fibré en droite, alors en considérant $\tilde{V}/\mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D})$ sans torsion (Cf proposition n°1.1), nous disposons (dans le cas défavorable) de la suite exacte suivante :

$$0 \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\tilde{D}) \to \tilde{V} \to \mathcal{O}_{\tilde{X}}(c_1(\tilde{V}) - \tilde{D}) \otimes I_Z \to 0$$

Nous savons par ailleurs que $\tilde{D} = \pi^* D + \Sigma_i a_i E_i$ pour un unique $a \in \mathbb{Z}$. Calculons la charge avec la suite exacte que nous venons d'écrire. Nous avons ainsi :

$$(c_1(V) - 2D)^2 - 4l(Z) - \sum_i (2a_i - c_i)^2 = -C(\tilde{V}) \qquad (*)$$

charge pour le fibré après éclatement. L'hypothèse de stabilité se réécrit sous la forme $W \cdot (c_1(V) - 2D)) \geq 1$. Mais $(W \cdot (c_1(V) - 2D))^2 \geq W^2 (c_1(V) - 2D)^2$ par l'inégalité de Hodge et l'on obtient par $(*)$:

$$\begin{aligned}(W \cdot (c_1(V) - 2D))^2 + W^2 C(\tilde{V}) &\geq W^2 \left(\sum_i (2a_i - c_i)^2 - C(\tilde{V}) \right) + W^2 C(\tilde{V}) \\ &\geq W^2 \sum_i (2a_i - c_i)^2\end{aligned}$$

Dès lors, $(W \cdot (c_1(V) - 2D))^2 \left(1 + W^2 C(\tilde{V})\right) \geq W^2 \sum_i (2a_i - c_i)^2$. On pose $n_1 := 1 + \sqrt{\frac{1}{W^2} + |C(\tilde{V})|}$ et $\forall n \geq n_1$,

$$n (W \cdot (c_1(V) - 2D)) > \sum_i 2a_i - c_i$$

ce qui, par définition, est la stabilité relativement à $nW - \sum_{i=1}^q E_i$. ■

En fait nous venons d'utiliser une généralisation du lemme n°3.2 :

Lemme 3.3 *Avec les notations précédentes, $nW - \sum_{i=1}^q E_i$ est ample si W est très ample et $n > \max\left(\sqrt{\frac{q^2}{W^2}}, q\right)$.*

► On applique le lemme de Nakai-Moishezon. Visiblement $(nW - \sum_{i=1}^q E_i)^2 > 0$ et pour toute courbe $\tilde{C} = C - \sum_{i=1}^q c_i E_i$ (avec $c_i \geq 0$), $W \cdot C \geq \max_i (c_i)$ et par conséquent $(nW - \sum_{i=1}^q E_i) \cdot \tilde{C} \geq (n - q) \max_i (c_i) > 0$ ce qui permet de conclure. ■

Corollaire 3.2 *Si $\tilde{V} = \pi^* V$, $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\tilde{V}$ est $nW - E$ stable si et seulement si V est W stable.*

► Si V est W-stable alors d'après ce que l'on a démontré, $\pi^* V$ est aussi stable. Réciproquement, supposons que $\pi^* V$ soit $nW - \sum_i E_i$ stable. Alors pour tout diviseur en droite de V on a $\pi^* D \hookrightarrow \pi^* V$ qui est non triviale et donc $nW \cdot D < \frac{1}{2} nW \cdot c_1(V)$ ce qui prouve que V est aussi W-stable. ■

Proposition 3.4 *Les deux derniers résultats sont valables pour des fibrés de rang 3.*

► On va faire la démonstration dans le cas où $c_1(\tilde{V}) = \pi^* c_1(V)$ pour simplifier les calculs, mais la démarche reste la même dans le cas général. Soit V un fibré de rang r sur X et $F' \subset \pi^* V$ un sous-faisceau de rang r'. On peut écrire avec les notations utilisées auparavant que

$$c_1(F') = \pi^* F + \sum_i b_i E_i$$

et que le fibré $W_0 = m_0 \pi^* W - \sum_i E_i$ est ample. Ainsi, si $n \geq m_0$, $W_n = (n - m_0) \pi^* W + W_0$ est ample. Dès lors, il suffit de montrer qu'il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0$,

$$(r' \pi^* c_1(V) - r c_1(F')) \cdot W_n > 0$$

soit en posant $n' = n - m_0$,

$$n'\left(r'c_1(V) - rF\right) \cdot W > \left(rc_1(F') - r'\pi^*c_1(V)\right) \cdot W_0$$

pour n' assez grand. En “re-descendant” l'inclusion $F' \hookrightarrow \pi^*V$, on a $\pi_*F' \hookrightarrow V$, et comme V est supposé W-stable, on obtient que

$$\left(r'c_1(V) - rF\right) \cdot W > 0$$

D'autre part, d'après le résultat principal de Maruyama (Cf [15]), l'ensemble

$$\{c_1(F') \cdot W_0 | F' \hookrightarrow \pi^*V, \text{ avec } V \text{ de rang } r \leq 3, \; c_1(V) \text{ et } c_2(V) \text{ fixés}\}$$

est borné supérieurement. D'où l'existence de l'entier n_0 qui ne dépend que des invariants de départ et des diviseurs amples.

Si $\tilde{V} = \pi^*V$ et $F \hookrightarrow V$ un sous faisceau de rang r, on a alors l'inclusion $\pi^*F' \hookrightarrow \tilde{V}$ et par W_n-stabilité de $\tilde{V}$,

$$\frac{c_1(F) \cdot W}{r} = \frac{c_1\left(\pi^*F\right) \cdot W_n}{nr} < \frac{c_1(\tilde{V}) \cdot W_n}{nr} = \frac{c_1(V) \cdot W}{r}$$

ce qui prouve le dernier corollaire dans le cas du rang 3. ■

Il y a donc une étroite relation entre l'espace des modules $\mathfrak{M}_{X,W}(r, c_1, c_2)$ de fibrés stables sur X de rang r à première et deuxième classe de Chern fixés et l'espace $\mathfrak{M}_{\tilde{X},nW-E}(r, \pi^*c_1, c_2)$. Il est clair que la proposition n°3.4 vient de définir un morphisme injectif qui est certainement aussi une immersion lorsque n est assez grand et que les résultats obtenus peuvent être appliqués au cas d'une famille bornée de faisceaux (Cf p :181 [13]). Il serait aussi intéressant à ce niveau d'étudier la relation entre la géométrie de la variété X et celle de l'espace $\mathfrak{M}_{\tilde{X}}(r, \pi^*c_1, c_2)$.

3.3 Construction de Buchdahl dans le cas d'une surface complexe compacte

N.P.Buchdahl a généralisé les résultats de Donaldson-Uhlenbeck-Yau (id est la correspondance Connexion irréductible Hermite-Einstein $\Longleftrightarrow$ Fibré stable [2]) au cas des surfaces complexes compactes et a prouvé dans “Sequences of stable vector bundles over compact complex surfaces” (Cf [4]) que les suites de fibrés stables de rang quelconque identifiés aux connexions Hermite-Einstein ont des sous-suites convergentes après éclatement, au moins quand les limites faibles sont stables. Ceci conduit à définir une topologie des espaces de modules de fibrés stables sur des surfaces complexes compactes (à éclatements près) et de conclure quant à la compacité du dit espace (Cf [5]). Remarquons pour finir que le travail de Buchdahl sera difficilement généralisable en dimension supérieure (Cf p :70 [5]).

Ici la convergence d'une suite d'éclatements est en fait la convergence d'une suite de structures complexes integrables sur la même variété sous-jacente $X\#n\overline{P_2}$. On note σ_i la $(1,1)$-forme correspondant au i-ème éclatement et $\rho_\alpha = \sum_i \alpha_i\sigma_i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+^{n*}$ ainsi que $\omega_\alpha = \pi^*\omega + \rho_\alpha$ le pull-back de la forme de $(1,1)$-forme positive $\partial\bar{\partial}$-fermée donnée par le théorème de Gauduchon.

Théorème 14 *Soit X une surface complexe compacte munie d'une $(1,1)$-forme positive $\partial\bar{\partial}$-fermée ω. Soit $\{A_i\}$ une suite de connexions Hermite-Einstein sur un fibré unitaire fixé E_{top} de rang r sur X telles que les fibrés holomorphes correspondants E_i soient stables et de degré uniformément borné. Supposons que E_i converge faiblement vers E en dehors d'un ensemble fini $S \subset X$ composé de $|S|$ points. Alors il existe une sous-suite $\{E_{i_j}\}$ pour laquelle :*

- *Il existe une suite d'éclatements $\widetilde{X_{i_j}}$ de X constituée d'au plus $2C(E_{top}) - 2C(E) - |S|$ éclatements individuels convergeant vers un éclatement $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de X avec diviseur exceptionnel $\pi^{-1}(S)$.*
- *Il existe des automorphismes complexes g_{i_j} de $\pi_{i_j}^* E_{top}$ tels que $\left(|g_{i_j}| + |g_{i_j}^{-1}|\right)$ soient uniformément bornés sur les sous-ensembles compacts de $X \backslash S$ et $\{g_{i_j}\}$ est uniformément convergente au sens C^2 dans ces mêmes sous-ensembles.*
- *$\{g_{i_j}\left(\pi_{i_j}^* A_{i_j}\right)\}$ converge uniformément dans C^2 vers une connexion lisse sur $\pi^* E_{top}$ sur $\tilde{X}$ laquelle définit un fibré holomorphe $\tilde{E}$ tel que $\left(\pi_* \tilde{E}\right)^{**} = E$.*
- *Si E est stable alors, pour tout choix convenable $|\alpha|$ suffisamment petit, les connexions $g_{i_j}\left(\pi_{i_j}^* A_{i_j}\right)$ sont $\left(\pi_{i_j}^* \omega + \rho_\alpha\right)$-Hermite Einstein et $\tilde{E}$ est ω_α-stable.*

Dans le cas du rang 2, on dispose même d'un résultat plus performant :

Théorème 15 *Sous les mêmes hypothèses que précédemment et en supposant que $b_1(X)$ est pair et que E_{top} est de rang 2, alors il existe $\{E_{i_j}\}$ telle que :*

- *Il existe une suite d'éclatements $\widetilde{X_{i_j}}$ de X constituée d'au plus $2C(E_{top}) - 1$ éclatements individuels convergeant vers un éclatement $\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$ de X.*
- *$\pi_{i_j}^* A_{i_j}$ est $\left(\pi_{i_j}^* \omega + \rho_\alpha\right)$ pour $\alpha \in \mathbb{R}_+^n$ convenablement choisi et la suite de connexions Hermite-Einstein correspondante converge fortement sur $\tilde{X}$ définissant un fibré ω_α-stable $\tilde{E}$ sur $\tilde{X}$.*

Soit E_{top} un fibré unitaire de rang r sur une surface de Kähler (X, ω) et $\mathcal{M}(X, E_{top})$ l'espace des classes d'isomorphisme de structures holomorphes quasi-stables sur E_{top}. Considérons les paires $\left(\tilde{X}, \tilde{E}\right)$ avec :

1. $\tilde{X}$ est un éclatement de X,
2. $\tilde{E}$ est un fibré holomorphe sur $\tilde{X}$ topologiquement isomorphe à $\pi^* E_{top}$ tel que $\pi_* E$ est semi-stable,
3. $\tilde{E}$ est ω_α-quasi-stable pour tout choix convenable de α.

Sur les paires $\left(\tilde{X}, \tilde{E}\right)$ satisfaisant de telles conditions, nous pouvons définir une relation d'équivalence $\simeq$ en posant que $\left(\tilde{X}_1, \tilde{E}_1\right) \simeq \left(\tilde{X}_2, \tilde{E}_2\right)$ s'il existe un éclatement $\tilde{X}_{12}$ tel que $\pi^* \tilde{E}_1 \approx \pi^* \tilde{E}_2$ sur $\tilde{X}_{12}$ et soit $\overline{\mathcal{M}}(X, E_{top})$ l'ensemble des classes d'équivalence. Une topologie sur $\overline{\mathcal{M}}(X, E_{top})$ est donnée par : $\left\{\left(\tilde{X}_i, \tilde{E}_i\right)\right\}_i$ converge vers $\left(\tilde{X}, \tilde{E}\right)$ si et seulement si $\left\{\left(\tilde{X}_i, \tilde{E}_i\right)\right\}_i$ peut être représentée par une suite d'éclatements $\tilde{X}_i$ convergeant vers $\tilde{X}$ avec $\tilde{E}_i$ fibrés ω_α-polystables sur $\tilde{X}_i$ convergeant fortement vers $\tilde{E}$ sur $\tilde{X}$.

Proposition 3.5 *Il existe $N(X, \omega, E_{top})$ tel que toute classe dans $\overline{\mathcal{M}}(X, E_{top})$ soit représentée par un fibré sur un éclatement d'au plus N éclatements individuels.*

Théorème 16 *Si E_{top} est de rang 2, $\overline{\mathcal{M}}(X, E_{top})$ est compact.*

Le fil conducteur du travail de Buchdahl est d'une part une estimation des changements induits par les éclatements sur la charge d'un fibré et d'autre part l'écriture d'un processus de stabilisation des fibrés semi-stables de manière a lisser les points singuliers de l'espace de modules, ce processus se basant exclusivement sur la théorie des faisceaux. Remarquons au passage que Buchdahl obtient un analogue de la proposition n°3.3 en rang quelconque :

Proposition 3.6 *Soit $\tilde{E}$ un fibré de rang r sur la surface éclatée X.*
Si E is $\omega_{\epsilon\alpha}$-stable pour tout $\epsilon > 0$ suffisament petit, alors $\pi_* E$ est ω-semi-stable.
Si $\tilde{E} = \pi^* E$ avec E fibré sur X and $\tilde{E}$ est ω_α-stable, alors E is ω-stable.
Si $\tilde{E}$ est ω_α-stable et $\pi_*\tilde{E}$ est ω-semi-stable, alors $\forall \epsilon \in]0,1]$, $\tilde{E}$ est $\omega_{\epsilon\alpha}$-stable.
Si $\pi_*\tilde{E}$ est stable, alors $\tilde{E}$ est ω_α-stable pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^n_+$ suffisamment petit.

3.4 Espace de modules sur $\mathbb{P}_2$ et éclatements

Comme on le sait, après un nombre suffisant d'éclatements, une surface rationnelle est biholomorphe à un éclatement de $\mathbb{P}_2$, et ainsi la classification des fibrés stables sur une surface rationnelle se réduit au problème de la classification des fibrés sur les éclatements de $\mathbb{P}_2$ avec des contraintes de trivialité sur certaines composantes du diviseur exceptionnel. Il est donc naturel de s'intéresser à l'espace de modules sur $\mathbb{P}_2$ dans le cadre de notre travail.

Comme on peut le voir dans le livre d'Okonek (chapitre 2, paragraphe 4.3 p :355 [18]) l'espace des modules de fibrés stables de rang 2 avec $c_1 = 0$ et $c_2 = 2$ est isomorphe à l'espace projectivisé des matrices symétriques de dimension 3 (qui est lui même isomorphe à $\mathbb{P}_5$) privé de l'hypersurface constituée des matrices symétriques de déterminant nul. Nous allons déterminer dans la suite ce que devient par éclatement $\pi : \widetilde{\mathbb{P}}_2 \to \mathbb{P}_2$ en un point p, cet espace de modules en utilisant le travail de Buchdahl.

Commençons par préciser les notations. Soit L_∞ une courbe rationnelle avec auto-intersection $+1$ dans $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ qui ne coupe pas le diviseur exceptionnel. A l'éclatement, correspond bien sûr une courbe rationnelle E_1 d'auto-intersection négative et les classes $\{[L_\infty], [E_1]\}$ forment une base de $H^0(\widetilde{\mathbb{P}}_2, \mathbb{Z})$. Soit de plus $\{h, e\}$ une base duale, de sorte que $[E_1] = q_{11} e$.

La stabilité sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ est par rapport à une métrique de la forme $\omega_{\varepsilon\alpha} = \pi^*\omega + \varepsilon\alpha\rho$ avec $\omega = \frac{1}{2\pi} FS$ sur $\mathbb{P}_2$ (avec FS métrique de Fubini-Study), ρ une $(1,1)$-forme fermée égale à $\frac{1}{2\pi} FS$ *sur* $E_i = \pi^{-1}(p)$, α une constante positive et $\varepsilon > 0$ suffisamment petit en fonction des classes de Chern. D'après la proposition 3.5 de [5], si $\alpha^2 < \frac{1}{3}$ alors tout fibré E (de rang 2 avec $c_1 = 0$, $c_2 = 2$) qui est ω_α stable est aussi $\omega_{\varepsilon\alpha}$ stable pour $\varepsilon\alpha < \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\pi_* E$ est aussi semi-stable et ces conditions de stabilité se traduisent par $H^0(\widetilde{\mathbb{P}}_2, E) = 0 = H^2(\widetilde{\mathbb{P}}_2, E)$. Par Riemann-Roch, on a donc que $H^1(\widetilde{\mathbb{P}}_2, E) = 0$ et E se scinde sur E_1 en $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ ou $\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(+1)$. Le même article précise que dans ces conditions, on peut décrire le fibré $E(0,1) := E \otimes \mathcal{O}(e)$ comme la cohomologie d'une monade sur $\widetilde{\mathbb{P}}_2$ de la forme :

$$0 \to K(-1,0) \otimes K(-1,-e) \xrightarrow{A} W \xrightarrow{B} L(1,0) \to 0 \qquad (M)$$

avec les mêmes abus de notation et K, W, L des espaces vectoriels. L'espace de modules de $\omega_{\varepsilon\alpha}$-fibrés stables est donc identifié avec l'espace des applications (A, B) telles que $BA = 0$, avec $A(x)$ injective et $B(x)$ surjective pour tout $x \in \widetilde{\mathbb{P}}_2$ et le fait que E soit stable modulo le groupe des automorphismes de la monade. Fixons des coordonnées $z^a = (z^0, z^1, z^2) \in \mathbb{P}_2$ telles que $L_\infty = \{z^2 = 0\}$ et le point $p = \{p^a\} = (p^A, 1)$, $A = 0, 1$. Comme dans "Stable 2 bundles on Hirzebruch surface" [1], on peut supposer que E est trivial sur L_∞, ce qui avec (M) permet de trouver une base pour L et W dans lesquelles peuvent être exprimées les matrices A et B et la question de stabilité se traduit sur les coefficients matriciels et en appliquant les résultat du même article via le paragraphe 4,

Proposition 3.7 *Soit* $\overline{\mathcal{M}_0} = P(\mathbb{C}^{ab})$ *l'espace des matrices symétriques* 3×3,
$S_0 = \{v^{ab} \in \overline{\mathcal{M}_0} | \det(v^{ab}) = 0\}$ *et pour* $v^a \neq 0$, $P(v^a) = \{[v^a \left(w^b\right)^T | w^b \in \left(\mathbb{C}^b\right)^*\}$.
Si $\alpha > 0$, *alors pour* ε *suffisamment petit, le module des fibrés stables de rang* 2 *avec* $c_1 = 0$, $c_2 = 2$ *est isomorphe à* $\overline{\mathcal{M}_1} \backslash \left(S_1 \cup \widetilde{P}(p^a)\right)$ *avec* $\overline{\mathcal{M}_1}$ *l'éclaté de* $\overline{\mathcal{M}_0}$ *le long de la transformée propre* $\widetilde{P}(p^a)$ *de* $P(p^a)$ *dans* $\overline{\mathcal{M}_0}$ *et* S_1 *la transformée propre de* S_0.

Question : Généralisation au cas d'un éclatement en n points distincts.

4 Annexe

Nous donnons ici quelques résultats techniques ainsi que des rappels de théorie de la mesure.

- Dimension de Hausdorff :
  Soit A un sous-ensemble de (X, d).espace métrique. Soit $\mathcal{B}_\varepsilon(A)$ l'ensemble des recouvrements dénombrables $(B_k)_{k\geq 1}$ de A par des boules B_k de diamètre inférieur à ε. Pour $d > 0$, soit
  $$H^d_\varepsilon(A) := \inf_{\mathcal{B}_\varepsilon(A)} \left(\sum_{k\geq 1} diam(B_k)^d \right)$$
  Mais $\varepsilon \longmapsto H^d_\varepsilon(A)$ est décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$ et c'est une mesure extérieure.
  $H^d(A) := \underset{\varepsilon\to 0}{lim} H^d_\varepsilon(A)$ est une mesure extérieure appelée mesure de Haudorff de dimension d. On peut montrer que si A est Lebesgue mesurable et $X = \mathbb{R}^n$, alors $H^n(A)$ est juste la mesure de Lebesgue de A. Dès lors, si $d > n$ et si A est un ensemble borné, alors $H^d(A) = 0$. On définit la dimension de Hausdorff de l'ensemble borné A par :
  $$dim(A) = inf \left\{ d > 0 : H^d(A) = 0 \right\} \in [0, n]$$
  Si $d > dim(A)$, $H^d(A) = 0$ et si $d < dim(A)$ alors $H^d(A) = +\infty$.
- On appelle mesure de radon sur X espace métrique localement compact, toute forme linéaire continue sur $C_c(X, \mathbb{K})$.
  Lemme de Fatou : soit pour tout n, $f_n : X \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable. Alors on a
  $$\int_X \liminf f_n d\mu \leq \liminf \int_X f_n d\mu$$
- Absolue continuité : $\nu \ll \mu$ si $\forall A \in \mathfrak{M}$, $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$. On dit que ν a une densité par rapport à μ si $\nu(A) = \int_A f d\mu$ avec f mesurable positive. Le théorème de Radon-Nikodym a pour objet d'établir une réciproque à cette construction : si $\nu \ll \mu$, ν a-t-elle nécessairement une densité par rapport à μ ? Dans le cas général, la réponse est non.
- Théorème de Radon-Nikodym dans le cas d'une mesure de référence μ finie. Soient μ et ν deux mesures finies sur un espace mesurable $(X, \mathfrak{M})$. Alors,
  $[\nu \ll \mu] \Leftrightarrow [\exists f \in \mathfrak{L}^1_{\mathbb{R}_+}(\mu) : \forall A \in \mathfrak{M}, \nu(A) = \int_A f d\mu$ et f est unique à une égalité μ-p.p. près].
- Rappelons l'inégalité de Sobolev-Poincaré : $p^* = \frac{np}{n-p} > p$ étant l'exposant de Sobolev,
  $$\begin{aligned} \left(\int_{B_R} |u - u_R|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} &\leq c(n,p) \left(\int_{B_R} |Du|^p dx + R^{-p} \int_{B_R} |u - u_R|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq c(n,p) \left(\int_{B_R} |Du|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$
  avec $u_R := \int_{B_R} u dx$.
- Technique de l'itération de Moser :
  Soit u une solution de $\int a^{\alpha\beta}(x) D_\alpha u D_\beta \phi dx \leq 0$ pour tout $\phi \in H^{1,2}_o(\Omega) = \overline{C^1_o}$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

avec $a^{\alpha\beta} \in L^\infty(\Omega)$ et l'on veut montrer que

$$\sup_{x\in B_{R/2}} u(x) \leq c'' \left(\int_{B_R} u^2 dx\right)^{1/2}$$

On utilise une fonction test $\phi = (u^+)^p \eta^2$ avec $u^+ = \max(u, 0)$ et η une fonction "cut-off".

Définition 4.0.1 *η vérifie les propriétés suivantes :*
a) $\eta \in C_o^\infty(B_R)$
b) $0 \leq \eta \leq 1$ *et* $\eta = 1$ *sur* $B_\rho \subset B_R \subset\subset \Omega$.
c) $|D\eta| \leq \frac{2}{R-\rho}$

On suppose tout d'abord que $u \geq 0$. *Alors*,

$$p\int_{B_r} a^{\alpha\beta} D_\alpha u D_\beta u u^{p-1}\eta^2 dx + \int_{B_r} a^{\alpha\beta} D_\alpha u u^p \eta D\eta dx \leq 0$$
$$\int_{B_R} |Du|^2 u^{p-1}\eta^2 dx \leq \frac{c}{p}\int_{B_R} |Du| u^{\frac{p-1}{2}} u^{\frac{p+1}{2}} \eta |D\eta| dx$$
$$\int_{B_R} |Du|^2 u^{p-1}\eta^2 dx \leq \frac{c}{p^2}\int_{B_R} u^{p+1}|D\eta|^2 dx$$

Comme $|Du^{\frac{p+1}{2}}|^2 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2 u^{p-1}|Du|^2$ donc on obtient

$$\int_{B_R} |Du^{\frac{p+1}{2}}|^2\eta^2 dx \leq c\left(\frac{p+1}{2}\right)^2 u^{p+1}|D\eta|^2 dx$$

et comme
$$|D(\eta u^{\frac{p+1}{2}})|^2 dx \leq c|Du^{\frac{p+1}{2}}|^2\eta^2 + u^{p+1}|D\eta|^2$$

et donc

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |Du^{\frac{p+1}{2}}| dx &\leq c\left(1 + \left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right)\int_{B_R} u^{p+1}|D\eta|^2 dx \\ &\leq c(p+1)^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\int_{B_R} u^{p+1}|D\eta|^2 dx\end{aligned}$$

On utilise maintenant les inégalités de Sobolev et les propriétés de η :

$$\left(\int \left(u^{\frac{p+1}{2}}\eta\right)^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \leq c(p+1)^2\left(1+\frac{1}{p^2}\right)\frac{1}{(R-\rho)^2}\int_{B_R} u^{p+1} dx$$

Posons $\lambda = 2^*/2 = \frac{n}{n-2}$ et $q := p+1 > 2$ alors

$$\left(\int_{B_\rho} u^{\lambda q} dx\right)^{1/\lambda} \leq c\frac{(1+q)^2}{(R-\rho)^2}\int_{B_R} u^q dx$$

Maintenant nous choisissons : $q_i := 2\lambda^i = \lambda q_{i-1}$ $(q_0 = 2)$ et $R_i := \frac{R}{2} + \frac{R}{2^{i+1}}$ $(R_0 = R)$. Alors,

$$\begin{aligned}\left(\int_{B_{R_{i+1}}} u^{q_{i+1}} dx\right)^{\frac{1}{\lambda^i+1}} &= \left(\int_{B_{R_{i+1}}} u^{\lambda q_i} dx\right)^{\frac{1}{\lambda}\frac{1}{\lambda^i}} \\ &\leq \prod_{k=0}^{i} \left[\frac{c(1+q_k)^2}{2^{-2(i+1)}R^2}\right]^{1/\lambda^k} \left(\int_{B_R} u^2 dx\right)^{1/2}\end{aligned}$$

et $\prod_{k=0}^{i} \left[\frac{c(1+q_k)^2}{2^{-2(i+1)}R^2}\right]^{1/\lambda^k} = \exp\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{\lambda^k} \log\left(c' \frac{(1+q_k)}{2^{-k-1}R}\right)\right) = \exp(c'' - n\log(R))$. Dès lors, pour tout k,

$$\left(\int_{B_{R_k}} u^{q_k} dx\right)^{1/q_k} \leq c'' \left(\int_{B_R} u^2 dx\right)^{1/2}$$

et donc :

$$\sup_{x \in B_{R/2}} u(x) \leq c'' \left(\int_{B_R} u^2 dx\right)^{1/2}$$

cqfd. ■

Références

[1] N.P. BUCHDAHL, *Stable 2-bundles on Hirzebruch surfaces*, Math. Z., **194**, 143-152, (1987).

[2] N.P. BUCHDAHL, *Hermitian-Einstein connections and stable vector bundles over compact complex surfaces*, Math. Ann., **280**, 625-687, (1988).

[3] N.P. BUCHDAHL, *Instantons on $n\mathbb{CP}2$*, J. Diff. Geom., **37**, (1993).

[4] N.P. BUCHDAHL, *Sequences of stable vector bundles over compact complex surfaces*, J. Geom. An., **9**, 391-428, (1999).

[5] N.P. BUCHDAHL, *Blowups and Gauge fields*, Pacif. J. of Math., **196**, 69-111, (2000).

[6] S.K. DONALDSON, *Anti-self dual Yang-Mills connections over complex algebraic surfaces and stable vector bundles*, Proc. Lond. Math. Soc., **50**, 1-26, (1985).

[7] S.K. DONALDSON & P. THOMAS, *Gauge theory in higher dimensions*, The Geometric universe, Oxford Univ. Press, 31-47, (1998).

[8] R. FRIEDMAN & J. MORGAN, *Gauge theory and the topology of 4-Manifolds*, IAS Park City, **4**.

[9] D. GIESEKER, *On the moduli of vector bundles on an algebraic surface*, Ann. Math., **106**, 45-60, (1977).

[10] R. HARVEY, H.B. LAWSON, C*alibrated Geometries,* Acta Math., **148**, 47-157, (1982).

[11] Y. HU & W. LI*, Variation of the Gieseker and Uhlenbeck compactifications,* arXiv :alg-geom/9409003, (1994).

[12] D.D. JOYCE, *Compact Manifolds with special holonomy*, Oxford Univ. Press, (2000).

[13] J. LE POTIER, *Lectures on vector bundles*, Cambridge studies in advanced math., (1997).

[14] F.H. LIN, *Gradient estimates and blow up analysis for stationary harmonic maps*, Ann. of Math., **149**, 785-829, (1999).

[15] M. MARUYAMA, *On boundedness of families of torsion free sheaves*, J.Math. Kyoto Univ., **21**, 673-701, (1981).

[16] P. MATTILA, *Geometry of Sets and measures in euclidian spaces*, Cambridge studies in advanced math, **44**.

[17] H. NAKAJIMA, *Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions*, J. Math. Soc. Japan, **40**, 383-392, (1988).

[18] C. OKONEK & M. SCHENIDER & H. SPINDLER, *Vector bundles on complex projective spaces*, Birkhäuser, (1980).

[19] D. PRICE, *A monotonicity formula for Yang-Mills fields*, Manuscripta Math., **43**, 131-166, (1983).

[20] L. Simon, *Theorems on Regularity and Singularity of Energy minimizing maps*, Lectures in Mathematics, Birkhäuser, (1996).

[21] R. Schoen, *Analytic aspects of the harmonic maps problem*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., **2**, 321-358, (1984).

[22] G. Tian, *Gauge theory and calibrated geometry*, Ann. of Maths., **151**, 193-268, (2000).

[23] K.K. Uhlenbeck, *Connections with L^p bounds on curvature*, Comm. Math. Phys., **83**, 31-42, (1982).

[24] K.K. Uhlenbeck, *Removable singularities in Yang-Mills fields*, Comm.Math. Phys., **83**, 11-30, (1982).

[25] K.K. Uhlenbeck & S.T. Yau, *On the existence of Hermitian Yang-Mills connections on stable vector bundles,* Comm. Pure. Appl. Math., **39**, 257-293, (1986).

Universite Paul Sabatier Toulouse III
Laboratoire Emile Picard UMR 5580
118 route de Narbonne, 31062 TOULOUSE, FRANCE
E-mail : *keller@picard.ups-tlse.fr*

Table des Matières

1 Introduction **3**
- 1.1 Rappels sur la notion de stabilité d'un fibré . . . 3
- 1.2 Connexions anti-auto-duales et fibrés stables . . . 5

2 Théorie de Jauge en dimension supérieure **10**
- 2.1 Formule de monotonie et estimations de courbure . . . 10
- 2.2 Connexions admissibles, connexions anti-auto-duales généralisées . . . 13
- 2.3 Rectifiabilité du lieu d'éclatement . . . 14
- 2.4 Connexions de Yang-Mills bouillonnantes . . . 18
- 2.5 Singularités apparentes pour les connexions de Yang-Mills . . . 19
- 2.6 Compactification des espaces de modules de connexions anti-auto-duales . . . 21
- 2.7 Applications aux espaces Calabi-Yau . . . 22

3 Perspective algébrique **25**
- 3.1 Riemann-Roch et théorème d'indice de Hodge . . . 25
- 3.2 Fibrés stables et éclatements . . . 26
- 3.3 Construction de Buchdahl dans le cas d'une surface complexe compacte . . . 30
- 3.4 Espace de modules sur $\mathbb{P}_2$ et éclatements . . . 32

4 Annexe **34**

Références **37**