A propos des opérateurs hypercycliques

23/06/98

Dans toute la suite (E, d) désignera un **$\mathbb{C}$-espace vectoriel métrique complet et séparable**, c'est à dire un espace dans lequel il existe **une partie S dénombrable dense**. On considère **un endomorphisme continu A de E**. A est dit cyclique s'il existe $x \in E$ tel que $\text{Vect}(A^n x, n \in \mathbb{N})$ soit dense dans E ; x est alors appelé vecteur cyclique. Dans l'étude qui suit, on s'intéresse à de nombreux endomorphismes -ou opérateurs- possèdant une forme de cyclicité bien plus forte : *l'hypercyclicité*. On note par ailleurs $\text{B}(x, r)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r, $Orb(x, A)$ l'orbite de x sous l'application A, et $\mathbb{C}[\text{Z}]$ l'espace des polynômes à coefficients complexes.

L'objet de cette première partie est d'étudier quelques caractéristiques des opérateurs hypercycliques. On va montrer, entre autres, qu'il n'y a pas d'opérateurs d'un espace vectoriel de dimension finie dans lui-même qui soit hypercyclique. On explicitera des exemples d'endomorphismes continus ayant des orbites denses dans le cas de la dimension infinie en démontrant notamment le théorème de Mac Lane et le théorème de Birkhoff.

1. Découverte de l'hypercyclicité

Définition 1.1. *Un point x est dit hypercyclique pour A lorsque l'orbite $\{A^n x \mid n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E. L'ensemble des points hypercycliques pour A est noté $HC(A)$ et cet ensemble est soit vide soit dense dans E. Dans ce dernier cas, l'opérateur A est dit hypercyclique.*

Lemme 1.1. *Si A est un endomorphisme hypercyclique, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $A - \lambda Id$ est d'image dense.*

▶ *Il suffit de montrer que $HC(A) \subset \overline{\text{Im}(A - \lambda Id)}$. Soit x est un vecteur hypercyclique pour A. Alors $\forall n \geqslant 1$, $A^n x = \sum_{k=1}^{n} C_n^k \lambda^{n-k} (A - \lambda Id)^k x + \lambda^n x = g_n x + \lambda^n x$ avec $g_n x \in \text{Im}(A - \lambda Id)$. Or l'orbite $Orb(x, A)$ est dense dans E, donc il existe une suite extraite $\left(A^{\phi(n)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \to +\infty} A^{\phi(n)} x = 2x$ (on choisit $A^{\phi(n+1)} x$ dans $Orb(x, A) \backslash \{x, Ax, ..., A^{\phi(n)} x\}$ qui est dense). Dès lors trois cas se présentent. Si $|\lambda| < 1$, on obtient $2x = \lim_{n \to +\infty} g_{\phi(n)} x$; si $|\lambda| = 1$, il existe une suite extraite*

$\left(\lambda^{\phi\circ\psi(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *convergeant vers* η *tel que* $|\eta| = 1$ *et ainsi* $(2-\eta)x = \lim\limits_{n\to+\infty} g_{\phi\circ\psi(n)}x$; *si* $|\lambda| > 1$ *alors, en divisant,* $x = -\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{g_{\phi(n)}x}{\lambda^{\phi(n)}}$. *Dans tous les cas,* $x \in \overline{\mathrm{Im}(A-\lambda Id)}$. $\square$

Lemme 1.2. *Si E est de dimension finie, alors $HC(A) = \emptyset$*

► *A admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$, et $\overline{\mathrm{Im}(A-\lambda Id)}$ $=\mathrm{Im}(A-\lambda Id)$ puisque l'on est en dimension finie, avec $\mathrm{Im}(A-\lambda Id) \neq E$. Ceci contredit le lemme. Donc A ne peut être hypercyclique.* $\square$

Le théorème qui suit établit une condition suffisante d'hypercyclicité pour un opérateur continu. On en verra plusieurs applications par la suite.

Théorème 1.1. *Critère de Kitaï (1982).*
Soit A est opérateur continu tel qu'il existe deux parties X et Y denses dans E, et une application B (non nécessairement continue) de Y dans Y, vérifiant:

$$(H)\begin{cases} AB = Id_Y \\ \forall x \in X,\ A^n(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \forall y \in Y,\ B^n(y) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \end{cases}$$

alors A est hypercyclique.

► *Soit S un ensemble dénombrable dense dans E. Montrons tout d'abord que $I_A \subset HC(A)$, avec*

$$I_A = \bigcap_{(s,k)\in S\times\mathbb{N}^*} I_{s,k} \quad \text{où} \quad I_{s,k} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} (A^n)^{-1}\left(B(s,1/k)\right)$$

Soient $x \in I_A$ et $y \in E$, $\varepsilon > 0$. Il suffit de montrer qu'il existe un entier n pour lequel $d(A^n x, y) < \varepsilon$. Or la densité de S assure qu'on peut trouver $s \in S$ tel que $d(s,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ et on choisit alors k tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. On sait qu'il existe n entier tel que $d(A^n x, s) < 1/k$ et l'inégalité triangulaire permet d'obtenir l'inclusion. Par ailleurs, la continuité de A assure que $I_{s,k}$ est ouvert. E étant complet, il est de Baire (autrement dit, toute intersection dénombrable d'ouverts denses dans E est dense dans E). Ainsi, pour montrer que $HC(A)$ est dense, il suffit de montrer que $\forall s \in S$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $I_{s,k}$ est dense dans E. Soient $b \in E$, $s \in S$, $\varepsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}^*$; il existe $x \in X$ et $y \in Y$ tels que $d(x,b) < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(y,s) < \frac{1}{2k}$. Posons $\rho_n = x + B^n(y)$. On a :

$$d(\rho_n, b) \leqslant d(\rho_n, x) + d(x,b) < d(x, x + B^n(y)) + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$d(A^n(\rho_n), s) = d(A^n x + y, s) < d(A^n x + y, y) + \frac{1}{2k}.$$

Ce qui conduit, d'après les deux dernières conditions de (H) et la continuité des lois usuelles sur un espace vectoriel métrique, à l'existence de $m_o \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \geqslant m_o$, $d(\rho_m, b) < \varepsilon$ et $d(A^m(\rho_m), s) < 1/k$. D'où $\forall m \geqslant m_o$, $\rho_m \in I_{s,k} \cap B(b, \varepsilon) \neq \emptyset$, d'où l'on déduit que $I_{s,k}$ est dense dans E, et le résultat. □

On appelle $H(\mathbb{C})$ l'espace des applications entières sur $\mathbb{C}$, c'est à dire des applications de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ qui sont somme d'une série entière. $H(\mathbb{C})$ muni de la distance $d(f,g) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \frac{S_n}{1+S_n}$, avec $S_n = \sup_{\overline{B}(O,n)} |(f-g)|$ est complet.Vérifions qu'il s'agit d'un espace séparable. On a $d(f_p, f) \underset{p \to +\infty}{\rightarrow} 0 \iff \forall K > 0, \sup_{|z| \leq K} |f_p(z) - f(z)| \underset{p \to +\infty}{\rightarrow} 0$, donc la convergence normale sur tout compact des polynômes de Taylor de f vers f montre que l'espace des polynômes complexes est dense dans $H(\mathbb{C})$ pour cette topologie. Si l'on considère les polynômes complexes à coefficients dans $\mathbb{Q}[i]$, on obtient une famille dénombrable dense dans $H(\mathbb{C})$ qui est bien séparable.

Théorème 1.2. *Théorème de Mac Lane (1952).*
L'opérateur continu A de dérivation sur $H(\mathbb{C})$ est hypercyclique.

▶ *A est continu grâce aux formules de Cauchy et plus précisément par le fait que $\forall f \in H(\mathbb{C})$, $f'(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z+e^{i\theta})e^{-i\theta}d\theta$. Prenons $X = Y = \mathbb{C}[\mathrm{Z}]$ et considérons B l'opérateur associant à un polynôme son unique primitive nulle en 0,qui vérifie $AB = Id_Y$. Si $P \in X$, $A^n(P) = 0$ pour $n > \deg(P)$. Par ailleurs, $\forall p \in \mathbb{N}$, on a $B^n(\mathrm{Z}^p) = \frac{p!}{(p+n)!}\mathrm{Z}^{p+n}$, donc*

$$\sup_{|z| \leq K} |B^n(\mathrm{Z}^p)(z)| = \frac{p! K^{p+n}}{(p+n)!} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi $B^n(\mathrm{Z}^p)$ tend vers 0 uniformément sur toute boule, ce qui signifie que $B^n(\mathrm{Z}^p)$ tend vers 0 pour la métrique d. Le résultat s'étend immédiatement à tout polynôme de Y, le critère de Kitaï permettant de conclure. □

Théorème 1.3. *Théorème de Birkhoff (1929).*
$\tau_1 : (z \mapsto f(z)) \longmapsto (z \mapsto f(z+1))$ *, translation de vecteur* 1 *sur* $H(\mathbb{C})$*, est hypercyclique.*

▶ *En effet, soit $X = \{f | f(z) = e^{-z}P(z), P \in \mathbb{C}[\mathrm{Z}]\}$ et $Y = \{f | f(z) = e^{z}P(z), P \in \mathbb{C}[\mathrm{Z}]\}$ et soit B définie par $\forall f \in H(\mathbb{C})$ $B(f) = z \longmapsto f(z-1)$. Vérifions la densité de X et de Y. Il est simple de voir que si $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes tendant uniformément vers $z \longmapsto e^z f(z)$ sur tout compact, alors la suite d'éléments de X: $(z \longmapsto e^{-z}P_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ tend uniformément sur tout compact vers f. De même pour Y. Par ailleurs, $\forall K > 0$, $\forall z$ tel que $|z| < K$, $\forall P \in \mathbb{C}[\mathrm{Z}]$, $P(z+n)e^{-(n+z)} \underset{n \to +\infty}{\rightarrow} 0$. Avec le critère de Kitaï on conclut.* □

Voici un théorème récent plus général grâce auquel on peut retrouver notamment les deux résultats précédents.

Théorème 1.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, et τ_α la translation de vecteur α : $\forall f \in H(\mathbb{C}), \forall z \in \mathbb{C}, \tau_\alpha(f(z)) = f(z+\alpha)$. Alors tout endomorphisme continu, autre qu'une homothétie, qui commute avec τ_α $(\forall \alpha \in \mathbb{C})$ est hypercyclique.*

2. Hypercyclicité synonyme de chaos ?

Nous allons examiner le lien entre hypercyclicité et chaos au sens de Devaney. Donnons quelques définitions générales dans le cas où f est une application quelconque d'un espace métrique.

Définition 2.1. *$f : E \to E$ est dite topologiquement transitive si $\forall U, V \subset E$, U et V ouverts, $\exists\ k \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$.*

Il est évident que si une application f possède une orbite dense dans E, alors elle est topologiquement transitive.

Définition 2.2. *$f : E \to E$ présente une sensibilité aux conditions initiales si $\exists \delta > 0$ tel que, $\forall x \in E$, $\forall U$ voisinage de x, $\exists\ y \in U$ et $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$.*

f est sensible aux conditions initiales s'il existe des points arbitrairement proches de x donné et qui seront ensuite "éloignés" d'au moins δ quand on itère f. Dès lors, on aboutit à l'une des définitions du chaos :

Définition 2.3. *Une application $f : E \to E$ est chaotique si les trois propriétés suivantes sont vérifiées :*

(1) Les points périodiques sont denses dans E.
(2) f est topologiquement transitive.
(3) f présente une sensibilité aux conditions initiales .

Pour résumer, un système dynamique chaotique possède des éléments de régularité (1), il n'est pas décomposable en deux systèmes indépendants (2) et il est aussi imprévisible puisque son comportement dépend des conditions initales (3). Supposons à présent que E est un espace vectoriel métrique complet et séparable.

Proposition 2.1. *Soit A un opérateur continu sur E. A est topologiquement transitif si et seulement si A est hypercyclique.*

▶ *Dans un sens, c'est évident. Réciproquement, soit A topologiquement transitif. Alors $\bigcap_{(s,k)\in S\times\mathbb{N}^*} I_{s,k} \subset HC(A)$ avec les notations de la première partie. Soient $(s,k) \in S\times\mathbb{N}^*$, $b \in E$, $\varepsilon > 0$, alors par transitivité topologique, $\exists j \in \mathbb{N}^*$ tel que $B(s,1/k)\cap A^j(B(b,\varepsilon)) \neq \emptyset$, donc $\exists x \in (A^j)^{-1}(B(s,1/k)\cap B(b,\varepsilon)$, ce qui prouve que $I_{s,k}$ est dense, d'où par le théorème de Baire, la densité de $HC(A)$ puisque $I_{s,k}$ est aussi ouvert.* □

Proposition 2.2. *Soit A un opérateur continu hypercyclique sur E. Alors A présente une sensibilité aux conditions initiales.*

▶ *Soit $x \in E$ et U voisinage de x. Posons $\Sigma = x + HC(A)$. Σ étant dense, il existe $y \in \Sigma\cap U$. Alors $y - x$ est hypercyclique pour A, donc l'ensemble $\{A^n x - A^n y, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans E ce qui prouve le résultat.* □

Théorème 2.1. *Théorème de Rolewicz (1969).*
On considère $(E,d) = (\ell^2, ||.||_2)$. Alors l'endomorphisme continu A qui à e_i associe λe_{i-1} si $i \geq 1$ et 0 sinon, où $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ désigne la base hilbertienne canonique de ℓ^2 et λ un complexe de module strictement supérieur à 1, est hypercyclique et chaotique.

▶ *Prenons, afin d'appliquer le critère de Kitaï, pour X l'ensemble des suites à valeurs complexes à support fini et pour Y, l'ensemble E. X et Y sont des parties denses de E. Dès lors, si on prend pour B l'endomorphisme tel que $B(e_i) = \frac{e_{i+1}}{\lambda}$, la relation $\|B^n(x)\|_2 = \frac{\|x\|_2}{|\lambda|^n}$ montre que le critère de Kitaï s'applique; A est bien hypercyclique. Soit par ailleurs $u = \sum u_n e_n \in \ell^2$. $\forall\varepsilon > 0$ $\exists N_o \in \mathbb{N}$, tel que $\forall N \geq N_o, \left\| u - \sum_{i=0}^{N} u_i e_i \right\|_2 < \varepsilon$ Définissons $v_N \in \ell^2$ par*

$$v_N = \left(u_o, ..., u_N, \frac{u_o}{\lambda^{N+1}}, ..., \frac{u_N}{\lambda^{N+1}}, \frac{u_o}{\lambda^{2(N+1)}}, ... \right)$$

On a $A^N(v_N) = v_N$, donc v_N est un point périodique pour A.
Enfin, $\|v_N - u\|_2 \leqslant \varepsilon + \left[\sum_{i=0}^{N} \frac{|u_i|^2}{|\lambda|^{2(N+1)}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|\lambda^{2(N+1)}|^k} \right) \right]^{1/2} \leqslant \varepsilon + \frac{||u||_2}{\sqrt{|\lambda|^{2(N+1)} - 1}} \leqslant 2\varepsilon$ pour N assez grand. D'où la densité des points périodiques de A et le résultat. □

Remarque 2.1. Pour $|\lambda| \leqslant 1$, on a $\|A^n x\|_2 \leqslant |\lambda|^n \|x\|_2 \leqslant \|x\|_2$; ainsi aucune orbite ne peut être dense et $HC(A) = \emptyset$.

Théorème 2.2. *Si A est un opérateur continu sur $H(\mathbb{C})$ qui ne soit pas une homothétie et qui commute avec n'importe quelle translation, alors A est chaotique.*

Tous les opérateurs continus hypercycliques sont-ils chaotiques ? Nous allons mettre en évidence un contre-exemple.

Définition 2.4. *Soit $\beta = (\beta(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement positive et décroissante de réels. On appelle $\ell^2(\beta)$ l'espace vectoriel des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\left(|u_n|^2\beta(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit sommable. Muni de la norme $||u||_\beta = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2\beta(n)}$, on peut montrer que cet espace est un Hilbert. Si $\beta(n) = 1$, on retrouve l'espace ℓ^2 classique. Par ailleurs, considérons maintenant le "backward shift" A, défini sur la base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ par $A(e_i) = e_{i-1}$si $i \geqslant 1$ et 0 sinon. Notons que pour que A soit continu sur $\ell^2(\beta)$, il faut et il suffit que $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta(n)}{\beta(n+1)} = \sigma < +\infty$ et dans ce cas A est de norme σ.*

Proposition 2.3. *Supposons A continu sur $\ell^2(\beta)$. Alors A est hypercyclique si et seulement si $\beta(n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.*

▶ *L'espace des suites presque nulles $\ell^2_o(\beta)$ est dense dans $\ell^2(\beta)$ et pour toute suite v de $\ell^2_o(\beta)$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n(v) = 0$. Toujours pour appliquer le critère de Kitaï, considérons le "forward shift" B tel que $B(e_i) = e_{i+1}$. On a $AB = Id$ sur $\ell^2_o(\beta)$. Si $\beta(n) \to 0$ on a $\forall v \in \ell^2_o(\beta)$, $B^n(v) \to 0$. Réciproquement, raisonnons par l'absurde en supposant que $\inf\limits_k \beta(k) > 0$; on a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*, |||A^k||| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{\beta(n)}{\beta(n+k)} \leqslant \frac{\beta(0)}{\inf\limits_{k\in\mathbb{N}} \beta(k)}$, donc l'orbite de chaque vecteur de $\ell^2(\beta)$ est un ensemble borné.*

□

Théorème 2.3. *On suppose β vérifie les hypothèses de la précédente définition, $\beta(n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et que A est continu. Alors les assertions suivantes pour $A \in \ell^2(\beta)$ sont équivalentes :*

(a) A possède un point périodique différent de 0.

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta(n) < +\infty$

(c) A est chaotique.

▶ *$(a) \Rightarrow (b)$. En effet si A admet un point périodique autre que 0, alors ils existent $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\beta)$, $N \in \mathbb{N}^*$, $m \in \mathbb{N}$ tels que $A^N(v) = v$ et $v_m \neq 0$. Dès lors, il apparaît que la suite v est périodique, de période N, et alors, $\forall k \in [|0, N-1|]$, on a :*

$$|v(m)|^2 \sum_{r=1}^{\infty} \beta(m-k+rN) = \sum_{r=1}^{\infty} |v(m+rN)|^2 \beta(m-k+rN)$$

$$\leqslant \sum_{n=k}^{\infty} |v(n)|^2 \beta(n-k) = \left\|A^k v\right\|_\beta^2 < +\infty$$

et ceci prouve que, $\forall k \in [|0, N-1|]$,

$$\sum_{r=0}^{\infty} \beta(m-k+rN) < +\infty$$

Dès lors β est sommable comme somme finie de suites sommables, d'où $(a) \Rightarrow (b)$.

▶ $(b) \Rightarrow (c)$. *Puisque* $\beta(n) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, *A hypercyclique présente une sensibilité aux conditions initiales. Il suffit de montrer qu'il existe un ensemble de points périodiques pour A qui soit dense. Mais β sommable assure que $\forall \omega \in \mathbb{C}$ tel que* $|\omega| \leqslant 1$,

$$k_\omega = (\overline{\omega}^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\beta)$$

Evidemment, k_ω est vecteur propre de A pour la valeur propre $\overline{\omega}$ et donc, k_ω est un point périodique de A si ω est racine de l'unité. Mais $\Omega = \mathrm{Vect}\{k_\omega\ ;\ \omega \text{ racine de l'unité}\}$ est dense dans $\ell^2(\beta)$. En effet, soit $u \in \ell^2(\beta)$ orthogonale à k_ω pour tout ω racine de l'unité. Alors, $\forall \omega \in \mathbb{C}$, tel que $|\omega| \leqslant 1$, posons:

$$F(\omega) = (k_\omega \mid u) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n)\beta(n)\omega^n$$

F est donc une série entière de rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et de par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, F est continue sur le disque unité. Mais comme $u \in \ell^2(\beta)$ orthogonale à k_ω pour toute racine de l'unité, F est nulle sur le cercle unité. Ainsi, d'après les formules de Cauchy; $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n\beta(n) = 0$. Puisque $\beta(n) > 0$, $u = 0$, $\Omega^\perp = \{0\}$, ce qui prouve la densité de Ω et par conséquent le résultat.

▶ $(c) \Rightarrow (a)$. *Induit par la définition 2.3. Le théorème est acquis.* □

Dès lors (b) avec $\beta(n) = \frac{1}{n+1}$ permet de déduire A peut ne pas être chaotique.

3. Puissances des opérateurs hypercycliques

On se pose désormais la question suivante : si A est un opérateur hypercyclique, qu'en est-il de A^n ?

Proposition 3.1. *Soient A opérateur hypercyclique et x vecteur hypercyclique pour A. $V = \{P(A)x,\ P \in \mathbb{C}[\mathrm{Z}]\}$ est un sous-espace vectoriel dense dans E, stable par A, et tout vecteur non nul de V est hypercyclique pour l'opérateur A.*

▶ *La seule chose non évidente est l'hypercyclicité des vecteurs non nuls de V. Mais, on peut remarquer que pour tout polynôme P, $Orb(P(A)x, A) = P(A)\,(Orb(x, A))$ puisque A et $P(A)$ commutent. Si $P(A)$ est d'image dense dans E, alors on obtiendra la densité de $Orb(P(A)x, A)$; mais $P(A)$ est constitué d'un produit de facteurs de la forme $A - \lambda Id$, qui sont d'image dense par le lemme de la première partie. D'où le résultat.* □

Théorème 3.1. *Si A est hypercyclique alors A^n est hypercyclique.*

▶ *Soit x un vecteur hypercyclique pour A. D'après la proposition précédente, $\forall y \in V = \{P(A)x, P \in \mathbb{C}[Z]\}$, $y \neq 0$, on a $Orb(y, A)$ dense dans V. Pour toute partie Ω de V, on notera $\widehat{\Omega}$ son adhérence relative à V. Posons $W = Orb(x, A^n)$. Il suffit de prouver que $\widehat{W} = V$, ce qui nous permettra alors d'affirmer que $Orb(x, A^n)$ est dense dans E et A^n hypercyclique. Posons $\forall k \in [|1, n-1|]$,*

$$W_k = \bigcup_{0 \le i_1 < \cdots < i_k \le n-1} \left(\widehat{A^{i_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_k}(W)} \right)$$

Nous remarquons tout d'abord que W_k est fermé dans V, comme réunion finie d'intersection de fermés, puis que $W_n \subset W_{n-1} \subset \cdots \subset W_1$. Par ailleurs, $W_1 = \widehat{A^0(W)} \cup \cdots \cup \widehat{A^{n-1}(W)} = V$ (car $A^0(W) \cup \cdots \cup A^{n-1}(W) = Orb(x, A)$) et l'on a $W_n = \widehat{A^0(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{n-1}(W)} \subset \widehat{W}$. On va prouver que $W_n = V$, car alors, immédiatement, $\widehat{W} = V$.
A cette fin, nous allons montrer que si nous supposons que $\exists k \in [|1, n-1|]$ tel que $W_k = V$ alors $W_{k+1} = V$. On fait l'observation suivante : $\forall l \in [|1, n-1|]$, $A(W_l) \subset W_l$, parce que si l'on se donne $0 \leqslant i_1 < ... < i_l \leqslant n-1$, alors

$$A\left(\widehat{A^{i_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_l}(W)}\right) \subset \widehat{A^{i_1+1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_l+1}(W)}$$

et il existe un l-uplet $0 \le j_1 < ... < j_l \le n-1$ tel que

$$\widehat{A^{i_1+1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_l+1}(W)} = \widehat{A^{j_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{j_l}(W)}$$

et $\widehat{A^{j_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{j_l}(W)} \subset W_l$, d'où $A(W_l) \subset W_l$. Par conséquent W_{k+1} est stable par A et, comme V ne contient que des vecteurs hypercycliques et le vecteur nul, si l'on suppose $W_{k+1} \neq V$, on obtient $W_{k+1} = \{0\}$ ou bien $W_{k+1} = \emptyset$. On va alors montrer qu'une telle hypothèse aboutit à une contradiction. Considérons en effet $(i_1, ..., i_k) \neq (j_1, ..., j_k)$. Vu la définition de W_{k+1},

$$\left(\widehat{A^{i_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_k}(W)}\right) \cap \left(\widehat{A^{j_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{j_k}(W)}\right) \subset W_{k+1}$$

donc

$$\left(\widehat{A^{i_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_k}(W)} \backslash \{0\}\right) \cap \left(\widehat{A^{j_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{j_k}(W)} \backslash \{0\}\right) \subset W_{k+1} \backslash \{0\} = \emptyset.$$

Ceci induit que $W_k \backslash \{0\} = V \setminus \{0\}$ est une réunion finie de fermés relatifs à $V \backslash \{0\}$ qui sont disjoints. V étant un espace vectoriel de dimension infinie, $W_k \backslash \{0\}$ est connexe, et donc l'un des fermés qui construit $W_k \backslash \{0\}$ est égal à $W_k \backslash \{0\}$ pendant que tous les autres sont vides. Notons-le $\widehat{A^{i_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{i_k}(W)} \backslash \{0\}$. Mais alors, comme on a déjà vu plus haut, $\exists \{j_1, ..., j_k\} \neq \{i_1, ..., i_k\}$ tel que

$$A(W_k \backslash \{0\}) \subset \widehat{A^{j_1}(W)} \cap \cdots \cap \widehat{A^{j_k}(W)} \backslash \{0\} = \emptyset$$

soit

$$A\,(V\backslash\{0\}) = \emptyset$$

et ceci est impossible car $Ax \in A(V\backslash\{0\})$*, d'où la contradiction. Par conséquent, du fait que* $W_1 = V$*, on a* $V = W_2 = W_3 = \cdots = W_n$*.* □

Corollaire 3.1. *Si A opérateur chaotique, alors A^n est aussi chaotique.*

▶ *Evident de par le dernier théorème et le fait que A et A^n ont même ensemble de points périodiques.* □

4. Le principe d'universalité

Il s'agit de généraliser le concept d'hypercyclicité en utilisant des suites d'opérateurs. Le concept en réultant, souvent appellé "universalité" a été longtemps étudié dans la théorie de l'approximation par les séries de Fourier et en analyse complexe. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'endomorphismes continus sur X espace métrique complet et séparable. On dit alors que $x \in X$ est hypercyclique pout (T_n) si l'ensemble $\{T_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans X. Si un tel vecteur existe, alors la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite suite d'opérateurs hypercyclique. On obtient alors par exemple une généralisation du critère de Kitaï :

Théorème 4.1. *Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'opérateurs sur X convergeant simplement vers 0 sur un sous-ensemble de X dense dans X. On suppose de plus qu'il existe Y sous-ensemble dense dans X et une suite d'applications (qui peuvent être non linéaires et non continues) $S_n : Y \to Y$ telle que $\forall n$, $T_nS_n = I_d$ sur Y et (S_n) converge simplement vers 0 sur Y. Alors (T_n) est hypercyclique.*

Définition 4.1. *Plus généralement encore, on dit qu'une fonction entière $H(z)$ est universelle, si elle représente un vecteur hypercyclique pour l'endomorphisme τ_α de l'espace des applications entières $H(\mathbb{C})$. De manière plus précise, H est universelle si*

$$\forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall f \in H(\mathbb{C}), \exists \alpha \in \mathbb{C}, \quad \max_{|z|\leq R} |H(z+\alpha) - f(z)| < \varepsilon$$

Définition 4.2. *Une fonction entière $A(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ est appelée fonction de comparaison si*

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ A_n > 0 \\ \frac{A_{n+1}}{A_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 0 \\ \left(\frac{A_{n+1}}{A_n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est une suite décroissante} \end{cases}$$

Enfin, une fonction entière $B(z)$ est dite A-comparable s'il existe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|B(z)| = O(A(\gamma|z|))$ au voisinage de l'infini. La borne inférieure des γ est appelé le *type-A pour B et est noté par $\sigma(B)$. Enfin, $[A, \sigma]$ désigne la classe de fonctions entières qui sont comparables avec la fonction de comparaison $A(z)$ et dont leur type est σ.*

Dans la théorie de l'information, on peut s'attendre à transmettre des données sur une application entière f à l'aide d'une suite de fonctions $(F_n(z))_n$ et pour cela, on devra connaître les coefficients $(a_1, ..., a_n)$ tels que

$$\max_{|z|\leq R} |a_1 F_1(z) + ... + a_n F_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

En utilisant des fonctions universelles, on peut, en principe, envoyer juste un seul nombre, $\alpha \in \mathbb{C}$, pour lequel

$$\max_{|z|\leq R} |H(z+\alpha) - f(z)| < \varepsilon \tag{$*$}$$

Ceci est l'objet du prochain théorème.

Théorème 4.2. *Quelquesoit $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, et pour toute fonction de comparaison $A(z)$ dans $[A, \sigma]$, il existe une fonction universelle qui vérifie $(*)$.*

▶ *On peut tout d'abord montrer qu'il existe $(N_n(A, \sigma))_n$ tels que si $\forall n, |z_n| > N_n(A, \sigma)$ alors la fonction $\prod\limits_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_j}\right)$ est une application entière et appartient à $[A, \sigma]$. Cela résulte du fait suivant: une condition nécessaire et suffiante pour que $B(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n z^n$ soit comparable, de type-A valant σ est que*

$$\underset{n}{inf} \left(\underset{p\geq n}{sup} \left| \frac{B_n}{A_n} \right|^{\frac{1}{n}} \right) = \sigma$$

On choisit ensuite une suite de polynômes P_n vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \deg(P_n) \geq 1$.

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n(0) \neq 0$.

(3) $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{i=1}^{n} \deg(P_i) > \deg(P_{n+1})$.

(4) $\forall R > 0, \forall \varepsilon > 0, \forall f \in H(\mathbb{C}), \exists n \in \mathbb{N}$ *tel que* $\underset{|z|\leq R}{max} |P_n(z) - f(z)| < \varepsilon$.

(1) et (2) induisent que P_n peut être représenté sous la forme :

$$P_n(z) = C_n \prod_{i=1}^{L_n} \left(1 - \frac{z}{z_{i,n}}\right), \text{ avec } C_n \neq 0, L_n \geq 1$$

Prenons maintenant deux suites $(\varepsilon_n)_n$ *et* $(R_n)_n$ *de réels positifs tels que* $\varepsilon_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$ *et* R_n *croissante et divergeant vers l'infini. On peut alors montrer qu'il est possible de construire une suite* $(\alpha_n)_n$ *de réels positifs tels que l'on ait:*

(1') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [|1, L_n|], \forall p \in \mathbb{N}^*,\ z_{m+n} + \alpha_n - \alpha_p \neq 0.$

(2') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [|1, M_n|],\ w_{m,n} + \alpha_n - \alpha_p \neq 0$ *où* M_n *et* $w_{m,n}$ *sont définis par :* $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [|1, M_n|]$

$$\begin{aligned} M_1 &= 0 \\ M_2 &= L_1 - L_2, \\ M_n &= L_1 + ... + L_{n-1} + M_2 + ... + M_{n-1} - L_n \end{aligned}$$

et pour $n \geq 3$,

$$w_{1,n} = \cdots = w_{M_n,n} = \left[C_n \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{L_k} (-z_{i,k} - \alpha_k) \prod_{k=2}^{n-1} \prod_{i=1}^{M_k} (-w_{i,k} - \alpha_k) \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{L_n} z_{i,n}} \right]^{\frac{1}{M_n}}$$

avec

$$w_{1,2} = \cdots = w_{M_2,2} = \left[C_2 \prod_{k=1}^{L_1} (-z_{k,1} - \alpha_1) \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{L_2} z_{i,2}} \right]^{\frac{1}{M_2}}$$

Alors,

(3') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [|1, L_n|],\ |z_{m,n} + \alpha_n| > N_{L_1+...+L_{n-1}+M_2+...+M_{n-1}+m}(A, \sigma).$

(4') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in [|1, L_n|],\ |w_{m,n} + \alpha_n| > N_{L_1+...+L_{n-1}+M_2+...+M_{n-1}+m}(A, \sigma).$

(5') $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \max\limits_{|z|\leq R_n} \left| \prod\limits_{k\neq n} \prod\limits_{i=1}^{L_k} \left(1 - \frac{z}{z_{i,k}+\alpha_k-\alpha_n}\right) \prod\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{M_k} \left(1 - \frac{z}{w_{i,k}+\alpha_k-\alpha_n}\right) - 1 \right| < \varepsilon_n$

(6') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{L_k} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{i,k}+\alpha_k}\right) \prod\limits_{k=n+1}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{M_k} \left(1 - \frac{\alpha_n}{w_{i,k}+\alpha_n}\right) - 1 \right| < \varepsilon_n.$

(7') $\forall n \in \mathbb{N}^*, \left| \prod\limits_{k=1}^{n} \prod\limits_{i=1}^{L_k} \left(1 - \frac{\alpha_n}{z_{i,k}+\alpha_k}\right) \prod\limits_{k=2}^{n} \prod\limits_{i=1}^{M_k} \left(1 - \frac{\alpha_n}{w_{i,k}+\alpha_k}\right) - C_n \right| < \varepsilon_n |C_n|.$

On va maintenant montrer que $H(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{L_k} \left(1 - \frac{z}{z_{i,k}+\alpha_k}\right) \prod\limits_{k=2}^{\infty} \prod\limits_{i=1}^{M_k} \left(1 - \frac{z}{w_{i,k}+\alpha_k}\right)$ *appartient à la classe* $[A, \sigma]$ *et est universelle. Le fait que* H *appartienne à la classe* $[A, \sigma]$

est évident d'après (3'). Soit $f \in H(\mathbb{C})$, on a d'après (4) l'existence d'une suite croissante $(n_j)_j$ telle que :

$$\max_{|z|\leq R}|f(z) - P_{n_j}(z)| \underset{n_j\to\infty}{\to} 0$$

Montrons alors que :

$$\max_{|z|\leq R}|H(z+\alpha_n) - P_{n_j}(z)| \underset{n_j\to\infty}{\to} 0$$

Notons que si $G(z) = \prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)$, alors :

$$G(z+\alpha) = G(\alpha)\prod_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{z_i-\alpha}\right), \quad \forall i \in \mathbb{N}^* \ \alpha \neq z_i.$$

Donc,

$$\begin{aligned} H(z+\alpha_n) \quad = \quad & \left[\prod_{k=1}^{\infty}\prod_{i=1}^{L_k}\left(1-\frac{\alpha_{n_j}}{z_{i,k}+\alpha_k}\right)\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{i=1}^{M_k}\left(1-\frac{\alpha_{n_j}}{w_{i,k}+\alpha_k}\right)\right]\prod_{i=1}^{L_{n_j}}\left(1-\frac{z}{z_{i,n_j}}\right)\times \\ & \left[\prod_{k\neq n_j}\prod_{i=1}^{L_k}\left(1-\frac{z}{z_{i,k}+\alpha_k-\alpha_{n_j}}\right)\prod_{k=2}^{\infty}\prod_{i=1}^{M_k}\left(1-\frac{z}{w_{i,k}+\alpha_k-\alpha_{n_j}}\right)\right]. \end{aligned}$$

Mais (6') et (7') prouvent que le premier crochet est égal à $C_{n_j}(1+\theta_{n_j})$ où $|\theta_{n_j}| \underset{n_j\to\infty}{\to} 0$ et le dernier crochet tend uniformément vers 1 pour $|z| \leq R$. Donc, $\forall R > 0$

$$\max_{|z|\leq R}|H(z+\alpha_{n_j}) - P_{n_j}(z)| \underset{n_j\to\infty}{\to} 0$$

ce qui prouve bien le théorème. □

Corollaire 4.1. *Soit $F : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ continue. Si $\forall z \in \mathbb{C}$,*

$$F\left(H(z), H'(z), ..., H^{(n-1)}(z)\right) = 0$$

où H est universelle alors $F = 0$.

▶ *Puisque H est universelle, l'ensemble $\left(H(z), H'(z), ..., H^{(n-1)}(z)\right)$ est dense dans $\mathbb{C}^n$. En d'autres termes, une fonction universelle ne peut-être solution d'une équation différentielle de la forme $F(y, ..., y^{(n-1)})$ quelquesoit $F \in C^o(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$.* □

L'importance de l'étude des vecteurs cycliques et hypercycliques dérive de l'étude des sous-espaces et des sous-ensembles stables. En effet, l'espace engendré par l'orbite d'un vecteur par un opérateur est le plus petit sous-espace stable contenant ce vecteur.

Ainsi, un opérateur n'a pas de sous espaces stables fermés non triviaux si et seulement si chaque vecteur non nul est cyclique. De même, un opérateur n'a pas de sous-ensembles fermés stables non triviaux si et seulement si chaque vecteur non nul est hypercyclique.

Dès lors se pose le problème des "invariants": un endomorphisme d'un Banach possède-t-il toujours un vecteur non cyclique (resp. non hypercyclique) non nul, c'est à dire un sous-espace (resp. un sous-ensemble) fermé et invariant ? La réponse est non; P.Enflo (1987) et C.Read (1988) en ont apporté des contre-exemples. En revanche, la conjecture demeure sur les espaces de Hilbert séparables et fait l'objet d'actives recherches depuis ces dernières années.

BIBLIOGRAPHIE

1. S.I. Ansari, *Hypercyclic and Cyclic Vectors,* J. Funct. Anal, (1995).
2. P.S. Bourdon, *Invariant Manifolds of Hypercyclic Vectors*, Proc. Amer. Math. Soc., (1993).
3. P.S. Bourdon, *The second iterate of a map with dense orbit,* Proc. Amer. Math. Soc., (1996).
4. R.M. Gethner & J.H. Shapiro, *Universal Vectors for Operators on Spaces of Holomorphic Functions*, Proc. Amer. Math. Soc., (1987).
5. G. Godefroy, *Operators with Dense, Invariant, Cyclic Vector Manifolds*, J. Funct. Anal., (1991).
6. R.A. Holmgren, *A First Course In Discrete Dynamical Systems*, Universitext. Springer, (1996).
7. C.J. Read, *The invariant subspace problem for a class of Banach spaces,* Israel. J. Math., (1988).
8. J.H. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Universitext. Springer, (1994).