Partie II
Le cas Général

Introduction :

Après avoir étudier la recherche des zéros d'une fonction par la méthode de Newton dans le cas scalaire, nous allons généraliser cette méthode en étudiant le cas matriciel.

1.Recherche de racines carrées d'une matrice :

Définition :

On dit qu'une matrice carrée A d'ordre n admet une racine carrée s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que $B^2 = A$.

- Montrons qu'il existe des matrices dans $\mathcal{M}_n(C)$ qui n'admettent pas de racines carrées :

Cas n = 2 :

Soit $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons qu'il existe une matrice carrée B d'ordre 2 telle que $B^2 = J$.

Alors on a :

$B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

De plus, comme $B^2 = J$, on a les valeurs propres de B^2 qui sont égales à celles de J donc $Sp(B^2) = \{0\}$.
Comme B est une racine carrée de J, les valeurs propres de B correspondent aux racines carrées des valeurs propres de J.
Ici, on a :
$\lambda \in Sp(B) \Rightarrow \lambda^2 \in Sp(B^2) = \{0\}$
donc $\lambda = 0$ et $Sp(B) = \{0\}$.

Comme $B \in \mathcal{M}_n(C)$, elle est trigonalisable et il existe $P \in GL(2,C)$ et $T \in \mathcal{M}_2(C)$ telles que $B = P^{-1}\ T\ P$ avec T une matrice triangulaire supérieure qui a les valeurs propres de B sur sa diagonale, c'est à dire que :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P$$

D'où :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} P^{-1}$$

Donc, en élevant au carré, on trouve :

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P B^2 P^{-1} \Rightarrow B^2 = P^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où la contradiction avec l'hypothèse car J = B^2 n'est pas la matrice nulle.
Donc J n'admet pas de racine carrée.
Plus généralement, les matrices sous la forme ci-dessous n'admettent pas de racine carrée.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \alpha & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où α désigne un élément non nul qui peut changer de position sur la diagonale où il se trouve.

<u>Preuve</u> :

Soit M $\in$ $\mathcal{M}_n(C)$ telle que M = $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \alpha & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$ *avec* $\alpha \in C^*$.

Supposons que M admette une racine carrée N $\in$ $\mathcal{M}_n(C)$.
Alors il existe des matrices T $\in$ $\mathcal{M}_n(C)$ triangulaire supérieure et P $\in$ GL(n,C) telles que :

$$N = P.T.P^{-1}$$

D'où, $N^2 = P.T^2.P^{-1} = M$.
De plus, comme N est une racine carrée de M, les termes diagonaux de la matrice T vérifient $t_{jj}^2 = m_{jj} = 0$ pour tout j (ce sont les valeurs propres de M). Donc $t_{jj} = 0 \ \forall j=1..n$.
La matrice T devient donc une matrice triangulaire supérieure avec ses termes diagonaux nuls.
D'où T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & \cdots & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'où $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t_{12}t_{23} & \cdots & t_{12}t_{2n}+\cdots+t_{1,n-1}t_{n-1,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t_{n-2,n-1}t_{n-1,n} \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$

Comme M est une matrice triangulaire supérieure, nous obtenons $M = T^2$ d'où la contradiction.
M n'admet donc pas de racine carrée.

-Montrons qu'il existe des matrices dans $\mathcal{M}_n(C)$ qui admettent une infinité de racines :

<u>Cas n = 3</u> :

Soit $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Une famille de racines carrées de K est :

$M_z = \begin{pmatrix} 0 & z & \beta \\ 0 & 0 & 1/z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $z \in C^*$ et $\beta \in C$ un élément quelconque.

En effet, on a :

$$M_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & z & \beta \\ 0 & 0 & 1/z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & z & \beta \\ 0 & 0 & 1/z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_z^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \times 1/z \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = K$$

De plus, si on fait varier z et le nombre β, on a bien une infinité de racines carrées pour K.

- Soit A une matrice triangulaire supérieure inversible. Montrons qu'il existe un choix de nombres complexes (b_{jj}) tels que $(b_{jj})^2 = a_{jj}$ et pour tout j et pour tout k différent de j, $b_{jj}+b_{kk} \neq 0$.

Comme A est une matrice triangulaire supérieure de GL(n,C), on a :

$\det(A) \neq 0$ et même $\prod_{j=1}^{n} a_{jj} \neq 0$.

On construit alors les éléments $(b_{jj})_{j=1..n}$ de C tels que $(b_{jj})^2 = a_{jj}$ pour tout j=1..n avec :
$b_{jj} = \alpha_{jj} + i\,\beta_{jj}$.

De plus, on choisit les nombres α_{jj} et β_{jj} de $\Re$, pour j=1..n, tels que $\alpha_{jj}>0$ ou $\alpha_{jj}=0$ et $\beta_{jj}>0$, pour j=1..n.
Donc, pour $j \neq k$, on a :

$b_{jj} + b_{kk} = (\alpha_{jj}+\alpha_{kk}) + i\,(\beta_{jj} + \beta_{kk})$ avec $\alpha_{jj}+\alpha_{kk}>0$ ou $\alpha_{jj}=\alpha_{kk}=0$ et $\beta_{jj} + \beta_{kk}>0$, par définition.
Donc $b_{jj} + b_{kk} \neq 0 \quad \forall j, \forall k \neq j$.

Remarque :

Si on choisit les (b_{jj}) comme précédemment on alors :
$\forall k \neq j$, $a_{jj} \neq a_{kk}$.
En effet, comme $b_{jj}+b_{kk} \neq 0$, $\forall k \neq j$ et comme $(b_{jj})^2 = a_{jj}$, $\forall j$, on a :
$b_{jj} \neq -b_{kk} \Rightarrow (b_{jj})^2 \neq (-b_{kk})^2 \Rightarrow a_{jj} \neq a_{kk}$.

Remarque :

Comme $\det(A) \neq 0$ équivaut à $\prod_{j=1}^{n} a_{jj} \neq 0$, on a aussi $b_{jj} \neq 0 \quad \forall j=1..n$.

En effet, comme $\prod_{j=1}^{n} a_{jj} \neq 0$, on a :
$a_{jj} \neq 0 \quad \forall j=1..n$ et d'après ce qui précède, on a alors $(b_{jj})^2 \neq 0$ ce qui implique que $b_{jj} \neq 0$ $\forall j=1..n$.

- Montrons que toute matrice inversible admet une racine carrée :

Tout d'abord, nous savons que dans $\mathcal{M}_n(C)$, toutes les matrices sont trigonalisables.
Soit $A \in GL(n,C)$. Alors, il existe $P \in GL(n,C)$ telle que $T = P^{-1}.A.P$ soit une matrice triangulaire supérieure (le résultat est équivalent avec une matrice triangulaire inférieure). De plus, on a :

$$\begin{aligned}\det(T) &= \det(P^{-1}.A.P) \\ &= \det(P^{-1}).\det(A).\det(P) \\ &= \det(A) \neq 0\end{aligned}$$

Donc T est une matrice triangulaire supérieure inversible.
Montrons maintenant qu'il existe une matrice U triangulaire supérieure telle que $U^2 = T$ c'est à dire U est une racine carrée de T.
Si cela est vrai, on a pour $B = P.U.P^{-1}$:

$$\begin{aligned}& B^2 = (P.U.P^{-1})^2 \\ \Leftrightarrow\ & B^2 = (P.U.P^{-1})(P.U.P^{-1}) \\ \Leftrightarrow\ & B^2 = P.U^2.P^{-1} \\ \Leftrightarrow\ & B^2 = P.T.P^1 \\ \Leftrightarrow\ & B^2 = A\end{aligned}$$

Donc B est une racine carrée de A et (-B) en est une autre.
Soit $T \in GL(n,C)$ donnée par :

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{avec } \det(T) = \prod_{j=1}^{n} t_{jj} \neq 0$$

et $U \in GL(n,C)$ donnée par :

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}.$$

Montrons que l'on peut choisir U telle que $U^2 = T$.

$$U^2 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Tout d'abord, on choisit les nombres complexes $u_{11}, u_{22}, \ldots, u_{nn}$ (termes diagonaux de U) pour qu'ils vérifient les conditions suivantes :

1. $\forall j=1..n$, $(u_{jj})^2 = t_{jj}$
2. $\forall j,k=1..n$ avec $j \neq k$, $u_{jj}+u_{kk} \neq 0$ (à l'aide du résultat précédent).

Ceci nous donne alors les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u_{11}^2 = t_{11} \\ u_{22}^2 = t_{22} \\ \quad \vdots \\ u_{nn}^2 = t_{nn} \end{cases} \quad \text{pour les termes diagonaux de la matrice U.}$$

De plus, on a :

$$\begin{cases} u_{11}u_{12}+u_{12}u_{22} = u_{12}(u_{11}+u_{22}) = t_{12} \\ u_{22}u_{23}+u_{23}u_{33} = u_{23}(u_{22}+u_{33}) = t_{23} \\ u_{11}u_{13}+u_{12}u_{23}+u_{13}u_{33} = u_{13}(u_{11}+u_{33})+u_{12}u_{23} = t_{11} \end{cases}$$

Or, on a $u_{11}+u_{22} \neq 0$ donc on trouve $u_{12} = \frac{t_{12}}{u_{11}+u_{22}}$.

De même, $u_{22}+u_{33} \neq 0$ donc on trouve $u_{23} = \frac{t_{23}}{u_{22}+u_{33}}$ et $u_{11}+u_{33} \neq 0$ nous permet de trouver

$u_{13} = \frac{t_{13}-u_{12}u_{23}}{u_{11}+u_{33}}$.

En continuant ainsi, on trouve toute la matrice U.
D'où, A admet une racine carrée B.

Remarque :

Toute matrice symétrique positive de $\mathcal{M}_n(\mathfrak{R})$ admet une unique racine carrée elle-même symétrique positive.

2.Méthode de Newton pour la racine carrée d'une matrice :

Soit $A \in GL(n,C)$ et soit $F : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$ définie pour tout $X \in \mathcal{M}_n(C)$, par :

$$F(X) := X^2-A.$$

De plus, on norme $\mathcal{M}_n(C)$ avec la norme $\| . \|$ définie par :

$$\|A\| := \sup |a_{ij}| \qquad (A=(a_{ij}))$$

qui est sous multiplicative c'est à dire $\|A.B\| \leq \|A\|.\|B\|$.

- Calcul de la différentielle de F au point A avec un accroissement H :

Pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_n(C)$ et pour toute autre matrice $H \in \mathcal{M}_n(C)$ négligeable devant X, on a :

$$\begin{aligned} & F(X+H) = (X+H)^2 - A \\ \Leftrightarrow\ & F(X+H) = X^2 + XH + HX + H^2 - A \\ \Leftrightarrow\ & F(X+H) = X^2 - A + XH + HX + H^2 \\ \Leftrightarrow\ & F(X+H) = F(X) + XH + HX + H^2 \end{aligned}$$

où l'application $X \to XH + HX$ est linéaire et $\|H^2\| = \|H\|^2 = o(\|H\|)$ quand $H \to 0$.
Donc la différentielle de F au point X appliquée à H est donnée par :

$$DF(X).H = XH + HX.$$

En particulier, $DF(A).H = AH + HA$.

-Algorithme de Newton pour F :

Sous réserve de l'existence de $[DF(X_n)]^{-1}$, on définit l'algorithme de Newton pour les matrices par :

$$X_{n+1} = X_n - [DF(X_n)]^{-1}.[F(X_n)]$$

Avec une matrice pour variable et une première itérée X_0 qui sera donnée.
Mais on ne sait pas si cet algorithme converge.

- Soit T une matrice triangulaire supérieure inversible qui vérifie :

$\forall j, \forall k \neq j$, $t_{jj} + t_{kk} \neq 0$ et soit C une matrice donnée d'ordre n.
Montrons que le système linéaire $TH + HT = C$ admet une solution unique, $H \in \mathcal{M}_n(C)$.

Posons $L : \mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{M}_n(C)$.
$H \mapsto TH + HT$

Nous savons que L est une application linéaire.
Montrons que L est injective c'est à dire $L(H) = 0 \Rightarrow H = 0$.
On suppose que $L(H) = 0$ donc :

$$\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & & h_{nn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ h_{n1} & \cdots & & h_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & t_{nn} \end{pmatrix}=0_{M_n(C)}$$

Puis on identifie à partir de la première colonne et par le terme de la $n^{\text{ième}}$ ligne ce qui nous donne :

$$\begin{cases} t_{nn}h_{n1}+h_{n1}t_{11}=0 \Rightarrow h_{n1}=0 \ car \ t_{nn}+t_{11}\neq 0 \\ t_{n-1,n-1}h_{n-1,1}+t_{n-1,n}h_{n,1}+h_{n-1,1}t_{11}=h_{n-1,1}(t_{n-1,n-1}+t_{11})=0 \Rightarrow h_{n-1,1}=0 \ car \ t_{n-1,n-1}+t_{11}\neq 0 \\ t_{n-2,n-2}h_{n-2,1}+t_{n-2,n-1}h_{n-1,1}+t_{n-2,n}h_{n,1}+h_{n-2,1}t_{11}=h_{n-2,1}(t_{n-2,n-2}+t_{11})=0 \Rightarrow h_{n-2,1}=0 \ car \ t_{n-2,n-2}+t_{11}\neq 0 \end{cases}$$

Par suite, on trouve que tous les éléments de la première colonne de H sont nuls et en effectuant la même méthode sur les autres colonnes, on obtient $H = 0$.
Donc L est injective.
Comme L est linéaire sur $\mathcal{M}_n(C)$ (donc en dimension finie) et injective, L est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(C)$, donc le système $L(H) = C$ admet une unique solution dans $\mathcal{M}_n(C)$.

- Soit B une racine carrée de A qui vérifie :
  $\forall j, \forall k \neq j \ \ b_{jj} + b_{kk} \neq 0$.

Montrons que DF(X) est inversible pour X dans un voisinage de B :

Tout d'abord, montrons que DF(B) est une application bijective.
Posons $T = P^{-1}.A.P$ une matrice triangulaire supérieure inversible avec $P \in GL(n,C)$. Comme B est une racine carrée de A, on a vu qu'il existait une matrice U triangulaire supérieure inversible qui vérifiait :
$U^2 = T$ et $\forall j=1..n, \forall k \neq j$, $u_{jj}+u_{kk} \neq 0$.
Posons $B = P.U.P^{-1}$, alors on a:

$$BH + HB = (P.U.P^{-1})H + H(P.U.P^{-1})$$
$$\Leftrightarrow BH + HB = P(U.P^{-1}.H.P)P^{-1} + P(P^{-1}.H.P.U)P^{-1}$$
$$\Leftrightarrow BH + HB = P[U.P^{-1}.H.P + P^{-1}.H.P.U]P^{-1}$$

Posons $H' = P^{-1}.H.P$, on a donc:

$$BH + HB = 0 \Leftrightarrow P(UH' + H'U)P^{-1} = 0$$
$$\Leftrightarrow UH' + H'U = 0$$
$$\Leftrightarrow H' = 0$$

car on a vu plus haut que le système $UH' + H'U$ était injectif où U est une matrice triangulaire supérieure inversible et $H' \in \mathcal{M}_n(C)$.
Donc $H = P.H'.P^{-1} = 0$ et l'application DF(B) est bien injective sur $\mathcal{M}_n(C)$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_n(C)$.

De plus, comme DF(B) est linéaire sur $\mathcal{M}_n(C)$ (qui est de dimension finie), on a une bijection de $\mathcal{M}_n(C)$ dans $\mathcal{M}_n(C)$.
Ensuite, montrons que l'application DF(X) est une bijection pour X au voisinage de B.
Posons G : $\mathcal{M}_n(C) \to \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(C), \mathcal{M}_n(C))$

$$X \mapsto \{H \mapsto XH + HX\}$$

On a déjà montré que l'application G était linéaire sur $\mathcal{M}_n(C)$ et $\mathcal{M}_n(C)$ est un espace de dimension finie donc l'application G est continue sur $\mathcal{M}_n(C)$.
Enfin, nous savons que l'application « déterminant » :
det : $\mathcal{M}_n(C) \to C$ est continue sur $\mathcal{M}_n(C)$ donc on a :

$$\lim_{X \to B} (\det(DF(X)) = \det(DF(B)) \neq 0.$$

D'où DF(X) est inversible dans un voisinage de B.

- Programmation de la méthode de Newton pour une matrice :

Nous avons tout d'abord programmé deux procédures. L'une nous permettant de transformer une matrice en vecteur et l'autre un vecteur en matrice. En voici l'algorithme :

```
transf_mat_vect:=proc(A)
local i,j,n;
n:=rowdim(A);
A:=matrix(n^2,1,[seq(seq(A[i,j],j=1..n),i=1..n)]);
end;

transf_vect_mat:=proc(V)
local s,m,n;
m:=rowdim(V);
n:=sqrt(m);
V:=matrix(n,n,[seq(V[s,1],s=1..m)]);
end;
```

Nous avons ensuite créé une procédure permettant de former une « base » de matrices dont l'algorithme est le suivant :

```
base:=proc(U)
local Xn,i,j,K,n,s,t;
global H;
Xn:=U;
n:=rowdim(U);
for i from 1 to n do
    for j from 1 to n do
        K[i,j]:=matrix(n,n,proc(s,t)
                options operator,arrow;
                if s=i and t=j then 1 else 0 fi
                end);
H[i,j]:=evalm(multiply(Xn,K[i,j])+multiply(K[i,j],Xn));
                      od
                  od;
end;
```

Ainsi, nous avons pu écrire le programme suivant pour rechercher la racine carrée d'une matrice à l'aide de la méthode de Newton :

```
newton_mat:=proc(A,U,eps)
local continue,compteur,i,j,k,l,n,s,t,Fx,M,Xn,DF;

Xn:=U;
n:=rowdim(U);
continue:=true;
compteur:=0;
while continue do

base(Xn);

DF:=matrix(n^2,n^2,[seq(seq(seq(seq(H[k,l][s,t],l=1..n),k=1..n),t=1..n),s=1..n)]);

Fx:=evalm(multiply(Xn,Xn)-A);
Fx:=transf_mat_vect(Fx);

M:=multiply(inverse(DF),Fx);
M:=transf_vect_mat(M);

compteur:=compteur+1;
Xn:=evalm(Xn-M);
continue:=evalb(eps<norm(M));
od;
print(`La racine carrée est` ,Xn,`après` ,compteur, `itérations`)
end;
```

Voici un exemple d'application de notre programme et le résultat obtenu :

```
A:=array(1..3,1..3,[[3,2,1],[0,1,2],[2,1,2]]);
carre:=multiply(A,A);
X0:=array(1..3,1..3,[[2.6,2,0.8],[0,1.2,2],[1.5,0.9,3]]);
newton_mat(carre,X0,0.1);
```

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$carre := \begin{bmatrix} 11 & 9 & 9 \\ 4 & 3 & 6 \\ 10 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

$$X0 := \begin{bmatrix} 2.6 & 2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & 2 \\ 1.5 & 0.9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$La\ racine\ carrée\ est, \begin{bmatrix} 2.999974782 & 1.999896918 & 1.000081557 \\ 0.00013763529 & 1.000105802 & 1.999784838 \\ 1.999902053 & 1.000023486 & 2.000103647 \end{bmatrix}, après, 3, itérations$$

3.Systèmes d'équations résolus par la méthode de Newton :

Nous allons tout d'abord introduire quelques notations.

Soient : $X = (x_1,\ldots,x_n) \in \Re^n$,

$F(X) = [F_1(X)\ldots F_p(X)] \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,p)$ avec pour tout j =1..p,

$$F_j(X) = \begin{pmatrix} f_{1j}(X) \\ \vdots \\ f_{nj}(X) \end{pmatrix}$$

Soit $J(X) = [J_1(X)\ldots J_p(X)] \in \mathcal{M}_{\mathfrak{R}}(n,np)$ avec :

$$J_j(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_{1j}}{\partial x_1}(X) \cdots\cdots \frac{\partial f_{1j}}{\partial x_n}(X) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ \frac{\partial f_{nj}}{\partial x_1}(X) \cdots\cdots \frac{\partial f_{nj}}{\partial x_n}(X) \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_k}(X)\right)_{1\le i,k\le n}$$

$J_j(X)$ est donc la jacobienne du vecteur $F_j(X)$.
On considère la norme :

$$\|A\| = \max_i\left(\sum_j |a_{ij}|\right).$$

Cette norme est sous multiplicative c'est à dire :

$$\|A.B\| \le \|A\|.\|B\|.$$

On obtient alors :

$$\|F(X)\| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{p} |f_{ij}(X)|\right)$$

et $$\|J(X)\| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}(X)}{\partial x_k}\right|\right)$$

<u>Remarque</u> :

En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Regardons le cas particulier où p = 1.
On obtient donc :

$$F(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{1\le i,j\le n}$$

où les f_i pour i = 1..n sont des fonctions de $\mathfrak{R}$.
On a aussi :

$$V(X) = (V_1(X)\ldots V_n(X)) \text{ avec } V_k(X) = \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k}(X)\right)_{1\le i,j\le n}$$

V(X) est la matrice hessienne du vecteur F(X).
Soit ‖ . ‖ la norme définie par :

$$\|A\| = \max_{1\le i\le n}(|a_i|).$$

Alors,

$$\|F(X)\| = \max_{1\le i\le n}(|f_i(X)|)$$

||J(X)|| = $\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f_i(X)}{\partial x_j}\right|\right)$

||V(X)|| = $\max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_k \partial x_j}\right|\right)$.

La matrice identité d'ordre n sera notée Id.
Nous allons commencer par démontrer deux lemmes.

<u>Lemme 1</u> :

Soit F : $\Omega \rightarrow \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$(n,p) avec Ω un ouvert non vide de $\Re^n$.
On suppose que [X,X + H] $\subset \Omega$ où H = ($h_1,\ldots,h_n$) et que chaque f_{ij} est de classe C^1 sur Ω.
Alors :
||F(X + H) – F(X)|| $\le$ p.||H||. $\sup_{Y\in[X,X+H]}\|J(Y)\|$.

<u>Preuve</u> :

Pour cela, nous appliquerons le théorème des accroissements finis pour les fonctions de $\Re^n$ dans $\Re$.
<u>Théorème des accroissements finis pour les fonctions de $\Re^n$ dans $\Re$</u> :
Il existe $c_{ij} \in]0,1[$ tel que :

$$f_{ij}(X + H) - f_{ij}(X) = \sum_{r=1}^{n} h_r \frac{\partial f_{ij}}{\partial x_r}(X + c_{ij}H).$$

On a :

$$\|F(X+H) - F(X)\| = \max_{1\le i\le n}\left(\sum_{j=1}^{p}\left|f_{ij}(X+H) - f_{ij}(X)\right|\right)$$

$$\Leftrightarrow \|F(X+H) - F(X)\| \le \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}|h_r|\left|\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_r}(X+c_{ij}H)\right|$$

$$\Leftrightarrow \|F(X+H) - F(X)\| \le \|H\| \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{ij}}{\partial x_r}(X+c_{ij}H)\right|$$

On suppose que le maximum est atteint en i_0.

$$\|F(X+H) - F(X)\| \le \|H\| \sum_{j=1}^{p}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{i_0 j}}{\partial x_r}(X+c_{i_0 j}H)\right|$$

$\Leftrightarrow \|F(X+H) - F(X)\| \le p.\ \|H\| \max_{1\le j\le p}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{i_0 j}}{\partial x_r}(X+c_{i_0 j}H)\right|$ car chaque terme est majoré par le maximum.
On suppose que le maximum est atteint en j_0 d'où :

$$||F(X+H)-F(X)|| \leq p.\ ||H||\ \sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{i_0 j_0}}{\partial x_r}(X+c_{i_0 j_0}H)\right|$$

$$\Leftrightarrow ||F(X+H)-F(X)|| \leq p.\ ||H||\ \sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{i_0 j}}{\partial x_r}(X+c_{i_0 j_0}H)\right|$$ car on prend tous les termes donc le maximum plus les autres.

$$||F(X+H)-F(X)|| \leq p.\ ||H||\ \max_{1\leq i\leq n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\left|\frac{\partial f_{i\,j}}{\partial x_r}(X+c_{i_0 j_0}H)\right|$$

$\Leftrightarrow ||F(X+H)-F(X)|| \leq p.\ ||H||.\ ||J(X+c_{i_0 j_0}H)||$ par définition de la norme.

$$\Leftrightarrow\ ||F(X+H)-F(X)|| \leq p.\ ||H||.\ \sup_{Y\in[X,X+H]}||J(Y)||.$$

<u>Remarque</u> :

Dans le cas p = 1, on a :

$$||J(X+H)-J(X)|| \leq n.\ ||H||.\ \sup_{Y\in[X,X+H]}||V(Y)||.$$

<u>Lemme 2</u> :

Soit $f:\ \Omega \to \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n,1)$

$$X \mapsto f(X) = \begin{pmatrix} f_1(X) \\ \vdots \\ f_n(X) \end{pmatrix}$$

telle que f est de classe C^2 sur Ω qui est un ouvert de $\mathfrak{R}^n$ contenant le segment [X,X + H].
Alors :

$$||f(X+H)-F(X)-J(X)H|| \leq \frac{1}{2}.||H||^2.\ \sup_{Y\in[X,X+H]}||V(Y)||.$$

<u>Preuve</u> :

On rappelle que :

- V(X) est une matrice carrée d'ordre n
- $||V(X)|| = \max_{1\leq i\leq n}\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_k}\right|\right)$
- $J(X) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{1\leq i,j\leq n}$.

Donc, on a :

$$J(X).H = \left(\sum_{1\leq j\leq n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X)\right)_{1\leq i\leq n}$$ est un vecteur colonne.

Appliquons la formule de Taylor à l'ordre 2 des fonctions de $\Re^n$ dans $\Re$ à chaque f_i.
On a donc :

$$f_i(X + H) - f_i(X) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{h_j h_k}{2} \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon_i)}{\partial x_j \partial x_k}$$

où $\varepsilon_i = X + c_i H$ avec $c_i \in]0,1[$.
D'où :

$$\| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \left\| \left(\sum_{j,k=1}^{n} |h_j|.|h_k| \left| \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon_i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \right)_{1\le i\le n} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \left\| \left(\sum_{j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon_i)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \right)_{1\le i\le n} \right\|$$

$$\Leftrightarrow \| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \max_{1\le i\le n} \sum_{j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon_i)}{\partial x_j \partial x_k} \right|$$

On suppose que le maximum est atteint pour i_0 d'où :

$$\| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \sum_{j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_{i_0}(\varepsilon_{i_0})}{\partial x_j \partial x_k} \right|$$

$$\Leftrightarrow \| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \max_{1\le i\le n} \sum_{j,k=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(\varepsilon_{i_0})}{\partial x_j \partial x_k} \right|$$

$$\Leftrightarrow \| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \; \|V(\varepsilon_{i_0})\| \text{ par définition}$$

$$\Leftrightarrow \| (f_i(X+H)-f_i(X)-\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X))_{1\le i\le n} \| \le \frac{1}{2} \|H\|^2 \sup_{Y\in[X,X+H]} \|V(Y)\|$$

Cette relation étant vraie pour tout i, le lemme est démontré.

<u>Retour au problème</u> :

Démontrons le théorème suivant :

Théorème :

Considérons le système F(X) = 0 c'est à dire :

$$(S)\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n)=0 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\dots,x_n)=0 \end{cases}$$

On suppose que chaque f_i est de classe C^1 sur $\Omega \subset \Re^n$.

Soit $X_0 \in \Omega$.

Ω étant ouvert, il existe $\alpha > 0$ tel que la boule ouverte $B(X_0, \alpha) = \{X / \|X - X_0\| < \alpha\}$ soit incluse dans Ω.

Supposons que :

- $J(X_0)$ est inversible et posons $\Gamma_0 = [J(X_0)]^{-1}$ (1)
- Il existe 4 constantes positives $\beta_0, \gamma_0, c, \mu_0$ vérifiant les conditions suivantes :

$$(S_1)\begin{cases} \|\Gamma_0\| \leq \beta_0 \quad (2) \\ \|\Gamma_0 f(X_0)\| \leq \gamma_0 \leq \dfrac{\alpha}{2} \quad (3) \\ \forall X \in B(X_0,\alpha), \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial^2 f_i(X)}{\partial x_j \partial x_k} \right| \leq c \quad (4) \\ \mu_0 = 2n\beta_0\gamma_0 c \leq 1 \quad (5) \end{cases}$$

Alors la suite $X_{p+1} = X_p - J^{-1}(X_p)f(X_p)$, de premier terme X_0, converge vers $\underline{X}$ solution de f(X)=0 et on a :

$\|\underline{X} - X_0\| \leq \alpha$.

On note, sous réserve d'existence, $\varepsilon_p = \|X_{p+1} - X_p\|$, $J_p = J(X_p)$ et $\Gamma_p = J_p^{-1}$.

a. Nous allons montrer par récurrence sur p que :

- J_p est inversible
- Il existe trois suites $(\beta_p), (\gamma_p)\, et\, (\mu_p)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \|\Gamma_p\| \leq \beta_p \\ \|\Gamma_p f(X_p)\| \leq \gamma_p \leq \dfrac{\alpha}{2^{p+1}} \\ B(X_0,\alpha) \supset B(X_0,\frac{\alpha}{2}) \supset \dots \supset B(X_0,\frac{\alpha}{2^p}) \\ \mu_p = 2n\beta_p\gamma_p c \leq 1 \end{cases}$$

Preuve :

Pour p = 0, d'après la propriété précédente, il est clair que :

$\|\Gamma_0\| \le \beta_0$, $\|\Gamma_0 f(X_0)\| \le \gamma_0 \le \frac{\alpha}{2}$ et $\mu_0 = 2n\beta_0\gamma_0 c \le 1$.

Supposons la propriété vraie au rang p et montrons la au rang p+1.

On a :

$$\varepsilon_p = \|X_{p+1} - X_p\|$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_p = \|X_p - J^{-1}(X_p) f(X_p) - X_p\|$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_p = \|J^{-1}(X_p) f(X_p)\|$$
$$\Leftrightarrow \varepsilon_p = \|\Gamma_p f(X_p)\| \le \gamma_p$$

d'où $\varepsilon_p \le \gamma_p$.

De plus, $B(X_{p+1}, \frac{\alpha}{2}) \subset B(X_p, \alpha)$ car soit X $\in B(X_{p+1}, \frac{\alpha}{2})$ alors :

$$\|X - X_p\| \le \|X - X_{p+1}\| + \|X_{p+1} - X_p\|$$
$$\Leftrightarrow \|X - X_p\| \le \frac{\alpha}{2} + \varepsilon_p$$
$$\Leftrightarrow \|X - X_p\| \le \frac{\alpha}{2} + \gamma_p$$
$$\Leftrightarrow \|X - X_p\| \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2^{p+1}}$$
$$\Leftrightarrow \|X - X_p\| \le \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha$$

donc X $\in B(X_p, \alpha)$.

Nous allons évaluer $\|I - \Gamma_p J(X_{p+1})\|$.

On a :

$$\|I - \Gamma_p J(X_{p+1})\| = \|\Gamma_p \Gamma_p^{-1} - \Gamma_p J(X_{p+1})\|$$
$$\Leftrightarrow \|\mathrm{I} - \Gamma_p J(X_{p+1})\| \le \|\Gamma_p\| \|J(X_p) - J(X_{p+1})\|$$
$$\Leftrightarrow \|\mathrm{I} - \Gamma_p J(X_{p+1})\| \le \beta_p \|J(X_p) - J(X_{p+1})\|$$

De plus, d'après (4), $\|V(X)\| \le c$ d'où :

$$\|J(X_p) - J(X_{p+1})\| \le n \|X_{p+1} - X_p\| . c \le n.\gamma_p c$$

d'où :

$$\|\mathrm{I} - \Gamma_p J(X_{p+1})\| \le n.\beta_p.\gamma_p.c$$
$$\Leftrightarrow \|\mathrm{I} - \Gamma_p J(X_{p+1})\| \le \frac{\mu_p}{2} < 1$$

La série $\sum_{k \ge 0} (I - \Gamma_p J(X_{p+1}))^k$ est convergente, de somme $(I - (I - \Gamma_p J(X_{p+1})))^{-1} = (\Gamma_p J(X_{p+1}))^{-1}$.

De plus, $\|(\Gamma_p J(X_{p+1}))^{-1}\| \le \frac{1}{1 - \frac{\mu_p}{2}} \le 2$.

On a :

$$\Gamma_{p+1} = J(X_p))^{-1} \Gamma_p^{-1} \Gamma_p$$
$$\Leftrightarrow \Gamma_{p+1} = (\Gamma_p J(X_{p+1}))^{-1} \Gamma_p$$

d'où l'existence de Γ_{p+1} .

De plus, $\|\Gamma_{p+1}\| \le \|(\Gamma_p J(X_{p+1}))^{-1}\| . \|\Gamma_p\|$

$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1}\| \le 2 . \|\Gamma_p\| \le 2\beta_p$

$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1}\| \le \beta_{p+1}$

où

$$\boxed{\beta_{p+1} = 2\beta_p}$$

Par définition, on a :

$$X_{p+1} = X_p - \Gamma_p f(X_p)$$

d'où $X_p - X_{p+1} = \Gamma_p f(X_p)$.

Or, $\Gamma_p = J^{-1}(X_p)$

D'où $J(X_p)(X_p - X_{p+1}) = f(X_p)$

$\Leftrightarrow f(X_p) + (X_{p+1} - X_p) J(X_p) = 0$.

On a donc :

$$\|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le \|\Gamma_{p+1}\| \|f(X_{p+1})\|$$

$$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le \|\Gamma_{p+1}\| \|f(X_{p+1}) - f(X_p) - J(X_p)(X_{p+1} - X_p)\|$$

$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le 2\beta_p . n . \frac{1}{2} \|X_{p+1} - X_p\|^2 \sup_{Y \in [X, X+H]} \|V(Y)\|$ d'après le lemme 2 avec $X = X_p$ et $H = X_{p+1} - X_p$.

Il vient que :

$$\|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le \beta_p . n . \gamma_p^2 c \quad \text{car} \quad \|X_{p+1} - X_p\| \le \gamma_p \ et \ \|V(X)\| \le c$$

$$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le \frac{1}{2} . \mu_p . \gamma_p$$

$$\Leftrightarrow \|\Gamma_{p+1} f(X_{p+1})\| \le \gamma_{p+1}$$

où

$$\boxed{\gamma_{p+1} = \frac{1}{2} \mu_p \gamma_p}$$

Ensuite, $\mu_{p+1} = 2.n.\beta_{p+1}.\gamma_{p+1}.c$

$\Leftrightarrow \mu_{p+1} = 2.n.2.\beta_p.\frac{1}{2}\mu_p \gamma_p.c$

$\Leftrightarrow \mu_{p+1} = 2.n.\beta_p.\mu_p \gamma_p.c$

$\Leftrightarrow \mu_{p+1} = \mu_p^2 \le 1$

d'où

$$\boxed{\mu_{p+1} = \mu_p^2}$$

Ainsi, nous avons démontré qu'il existe trois suites $(\beta_p), (\gamma_p) \ et \ (\mu_p)$ telles que :

$$\begin{cases} \|\Gamma_p\| \le \beta_p \\ \|\Gamma_p f(X_p)\| \le \gamma_p \\ \mu_p = 2n\beta_p\gamma_p c \end{cases}$$

où

$$\begin{cases} \beta_p = 2.\beta_{p-1} \\ \gamma_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}\gamma_{p-1} \\ \mu_p = \mu_{p-1}^2 \end{cases}$$

b. Nous allons montrer que la suite (X_p) est une suite de Cauchy de $\Re^n$.

Preuve :

Soit $X_{p+q} \in B(X_p, \frac{\alpha}{2^p})$ si q>0.

Soit $\eta > 0$ et p tel que $2^p > \frac{\alpha}{\eta}$ c'est à dire $\eta > \frac{\alpha}{2^p}$.

On a donc $\|X_{p+1} - X_p\| \le \frac{\alpha}{2^p} < \eta$.

D'où l'existence de la limite $\underline{X}$ car $\Re^n$ est complet donc toute suite de Cauchy de $\Re^n$ est convergente.

De plus, nous avons vu que $f(X_p) + (X_{p+1} - X_p)J(X_p) = 0$, donc en passant à la limite avec $X_{p+1} - X_p \to 0$ et $J: X \to J(X)$ continue (car f est C^1 donc les dérivées partielles sont continues donc J est continue), on a :

$\lim_{p\to\infty}(X_{p+1} - X_p)J(X_p) = J(\underline{X}).0 = 0$

D'où, par continuité, $f(\underline{X})=0$.

De plus,

$\|\underline{X} - X_0\| \le \sum_{p\ge0} \|X_{p+1} - X_p\| \; et \; \|X_{p+1} - X_p\| \le \gamma_p$.

Or, $\gamma_p = \frac{1}{2}\mu_{p-1}\gamma_{p-1} \le \gamma_p = \frac{1}{2}\gamma_{p-1} \; car \; \mu_{p-1} \le 1$.

En faisant les mêmes majorations jusqu'en γ_0, on obtient :

$$\gamma_p \le \frac{1}{2^p}\gamma_0.$$

On en déduit que :

$$\|\underline{X} - X_0\| \le \sum_{p\ge0} \frac{1}{2^p}\gamma_0$$

$$\Leftrightarrow \|\underline{X} - X_0\| \le \gamma_0 \sum_{p\ge0} \frac{1}{2^p}$$

$$\Leftrightarrow \|\underline{X} - X_0\| \le 2\gamma_0 \le \alpha$$

On a donc $\underline{X} \in B(X_0, \alpha)$.

Nous allons maintenant démontrer la propriété suivante qui nous assure l'unicité de la solution.

Propriété :

Sous les mêmes conditions que (1), (2), (3), (4) et (5), il existe une et une suele solution du système (S) dans la boule fermée $\overline{B}(X_0,2\gamma_0)$.

Preuve :

Soit X* une autre solution du système telle que

$$\|X^*-X_0\|\leq 2\gamma_0 .$$

Nous avons vu que X_p appartient à la boule $\overline{B}(X_0,2\gamma_0)$.

Montrons par récurrence que $\|X_p-X^*\|\leq 2\gamma_p$.

Pour p = 0, la propriété est vraie par hypothèses.
Supposons la propriété vraie au rang p et montrons la au rang p+1.
Par définition, on a :

$$X_{p+1}=X_p-\Gamma_p f(X_p)$$

$$\Leftrightarrow X_{p+1}-X^*=X_p-\Gamma_p f(X_p)-X^*$$

$$\Leftrightarrow J_p(X_{p+1}-X^*)=J_pX_p-f(X_p)-J_p(X^*)$$

$\Leftrightarrow J_p(X_{p+1}-X^*)=f(X^*)-f(X_p)-J_p(X^*-X_p)$ car $f(X^*)=0$ car X^* est solution de f(X) = 0.

On a donc :

$$X_{p+1}-X^*=\Gamma_p(f(X^*)-f(X_p)-J_p(X^*-X_p))$$

d'où $\|X_{p+1}-X^*\|\leq\|\Gamma_p\|\|f(X^*)-f(X_p)-J_p(X^*-X_p)\|$

$\Leftrightarrow\|X_{p+1}-X^*\|\leq\beta_p\frac{1}{2}\|X^*-X_p\|^2 n.c$ d'après le lemme 2avec $X = X_p$ et $H = X^* - X_p$.

D'où $\|X_{p+1}-X^*\|\leq\frac{1}{2}n.\beta_p c.4\gamma_p^2$ par hypothèse de récurrence, $\|X_p-X^*\|\leq 2\gamma_p$.

Donc $\|X_{p+1}-X^*\|\leq 2n.\beta_p c.\gamma_p^2$

$$\Leftrightarrow\|X_{p+1}-X^*\|\leq\mu_p\gamma_p$$

$$\Leftrightarrow\|X_{p+1}-X^*\|\leq 2\gamma_{p+1}\ car\ \mu_p=\frac{2\gamma_{p+1}}{\gamma_p}.$$

Donc la propriété est vraie au rang p+1.

D'où, $\|X_p-X^*\|\leq 2\gamma_p$ et $\lim_{p\to\infty}\gamma_p=0$.

Par passage à la limite, on en déduit que :

$\lim_{p\to\infty}X_p=X^*$ et on a $\lim_{p\to\infty}X_p=\underline{X}$.

D'où, $X^* = \underline{X}$ d'où l'unicité de la solution.

Nous allons maintenant étudier la rapidité de la convergence.

Propriété :

Sous les mêmes conditions que (1), (2), (3), (4) et (5), on a :

$$\left\|\underline{X}-X^*\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{p+1} \mu_0^{2^p-1}\gamma_0 .$$

Preuve :

On sait que $\mu_{p+1}=\mu_p^2$ d'où $\mu_p=\mu_0^{2^p}$.

De plus, on a $\gamma_p=\frac{1}{2}\mu_{p-1}\gamma_{p-1}=\frac{1}{2}\mu_0^{2^{p-1}}\gamma_{p-1}$.

D'où : $$\gamma_p=\left(\frac{1}{2}\right)^p\left(\mu_0^{2^{p-1}+2^{p-2}+...+2^0}\right)\gamma_0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_p=\left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\gamma_0$$

car $2^{p-1}+2^{p-2}+...+2^0$ est une série géométrique de raison 2 donc égale à $\frac{1-2^p}{1-2}=2^p-1$.

De plus,

$$\left\|X_{p+q}-X_p\right\|=\left\|X_{p+q}-X_{p+q-1}+X_{p+q-1}-...-X_{p+1}+X_{p+1}-X_p\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \left\|X_{p+q}-X_{p+q-1}\right\|+...+\left\|X_{p+1}-X_p\right\|$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \gamma_{p+q-1}+...+\gamma_{p+1}+\gamma_p$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\gamma_0\left(1+\frac{1}{2}\mu_0^{2^p}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}\mu_0^{2^p(2^{q-1})}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\gamma_0\left(1+\frac{1}{2}+...+\left(\frac{1}{2}\right)^{q-1}\right) \; car \; \mu_0 \le 1$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\gamma_0\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^q}{1-\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le 2.\left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\gamma_0$$

$$\Leftrightarrow \left\|X_{p+q}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} \mu_0^{2^p-1}\gamma_0$$

Lorsque $q\to\infty$, $\left\|\underline{X}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1}\mu_0^{2^p-1}\frac{\alpha}{2}$

$$\Leftrightarrow \left\|\underline{X}-X_p\right\| \le \left(\frac{1}{2}\right)^p \mu_0^{2^p-1}\alpha$$ qui est une convergence exponentielle.

D'où, si $\mu_0<1$, la convergence est extrêmement rapide.

Etudions maintenant la stabilité de la convergence devant le choix de l'approximation initiale.

Propriété :

Sous les mêmes conditions que (1), (2), (3), (4) et (5) ajoutées à $\frac{2\gamma_0}{\mu_0}\le\alpha$ avec $\mu_0=2n\beta_0\gamma_0 c\le 1$, l'algorithme de Newton converge vers l'unique solution du système dans la boule $\overline{B}(X_0,2\gamma_0)$ quel que soit le choix de la valeur initiale dans la boule définie par $\overline{B}(X_0,\frac{1-\mu_0}{2\mu_0}\gamma_0)$.

Preuve :

4. La méthode de Bairstow :

Soit $p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (1).
On cherche les racines de $p(x) = 0$.
Pour cela, on effectue la division euclidienne de p par le polynôme $t(x) = x^2 - sx + p$.
Alors :

$$p(x) = t(x).(b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2}) + b_{n-1}(x - s) + b_n \qquad (2)$$

où les b_i dépendent de s et p.
Posons :

$$q(x) = b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-3} + \ldots + b_{n-3} x + b_{n-2}$$

et $r(x) = b_{n-1}(x - s) + b_n$

D'après (1) et (2), on a :
$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = b_0 x^n - s\, b_0 x^{n-1} + p\, b_0 x^{n-2} + b_1 x^{n-1} - s\, b_1 x^{n-2} + p\, b_1 x^{n-3} + b_2 x^{n-2} - s\, b_2 x^{n-3} + p\, b_2 x^{n-4} + \ldots + b_{n-3} x^3 - s\, b_{n-3} x^2 + p\, b_{n-3} x + b_{n-2} x^2 - s\, b_{n-2} x + p\, b_{n-2} + b_{n-1} x - s\, b_{n-1} + b_n$

D'où :

$$\begin{cases} a_0 = b_0 \\ a_1 = -s b_0 + b_1 \\ a_2 = p b_0 - s b_1 + b_2 \\ \vdots \\ a_{n-3} = p b_{n-5} - s b_{n-4} + b_{n-3} \\ a_{n-2} = p b_{n-4} - s b_{n-3} + b_{n-2} \\ a_{n-1} = p b_{n-3} - s b_{n-2} + b_{n-1} \\ a_n = p b_{n-2} - s b_{n-1} + b_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} b_0=a_0 \\ b_1=a_1+sb_0 \\ b_2=a_2+sb_1-pb_0 \\ \vdots \\ b_k=a_k+sb_{k-1}-pb_{k-2} \\ b_{n-1}=a_{n-1}+sb_{n-2}-pb_{n-3} \\ b_n=a_n+sb_{n-1}-pb_{n-2} \end{cases}$$

Soit (s_0,p_0) un couple tel que :

$b_{n-1}(s_0,p_0) = b_n(s_0,p_0) = 0$

c'est à dire $b_{n-1}=a_{n-1}+s_0b_{n-2}-p_0b_{n-3}=0$ et $b_n=a_n+s_0b_{n-1}-p_0b_{n-2}=0$.

Alors p(x) = t(x).q(x) = 0.

D'où t(x) = 0 c'est à dire $x^2 - sx + p = 0$.

On obtient donc deux solutions de l'équation p(x) = 0.

La méthode de Bairstow utilise la méthode de Newton pour deux variables pour résoudre le système :

$b_{n-1}(s,p) = 0$

et $b_n(s,p) = 0$.

Nous devons donc calculer les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial b_n}{\partial s},\frac{\partial b_n}{\partial p},\frac{\partial b_{n-1}}{\partial s},\frac{\partial b_{n-1}}{\partial p}.$$

On a :

$$\begin{cases} \frac{\partial b_0}{\partial s}=0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial s}=s\frac{\partial b_0}{\partial s}+b_0 \\ \frac{\partial b_2}{\partial s}=s\frac{\partial b_1}{\partial s}+b_1-p\frac{\partial b_0}{\partial s} \\ \vdots \\ \frac{\partial b_k}{\partial s}=s\frac{\partial b_{k-1}}{\partial s}+b_{k-1}-p\frac{\partial b_{k-2}}{\partial s} \\ \frac{\partial b_{n-1}}{\partial s}=s\frac{\partial b_{n-2}}{\partial s}+b_{n-2}-p\frac{\partial b_{n-3}}{\partial s} \\ \frac{\partial b_n}{\partial s}=s\frac{\partial b_{n-1}}{\partial s}+b_{n-1}-p\frac{\partial b_{n-2}}{\partial s} \end{cases}$$

Soit $\alpha_i=\frac{\partial b_i}{\partial s}$. Alors, on obtient :

$$\begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = b_0 \\ \alpha_2 = s\alpha_1 + b_1 \\ \vdots \\ \alpha_k = s\alpha_{k-1} + b_{k-1} - p\alpha_{k-2} \\ \alpha_{n-1} = s\alpha_{n-2} + b_{n-2} - p\alpha_{n-3} \\ \alpha_n = s\alpha_{n-1} + b_{n-1} - p\alpha_{n-2} \end{cases}$$

De même, soit $\beta_i = \frac{\partial b_i}{\partial p}$. Alors on obtient :

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = s\beta_0 = 0 \\ \beta_2 = s\beta_1 - b_0 - p\beta_0 = -b_0 \\ \vdots \\ \beta_k = s\beta_{k-1} - b_{k-2} - p\beta_{k-2} \\ \beta_{n-1} = s\beta_{n-2} - b_{n-3} - p\beta_{n-3} \\ \beta_n = s\beta_{n-1} - b_{n-2} - p\beta_{n-2} \end{cases}$$

D'où,

$$\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = -\alpha_1 \\ \vdots \\ \beta_k = -s\alpha_{k-2} - b_{k-2} + p\alpha_{k-3} = -\alpha_{k-1} \end{cases}$$

On sait que l'algorithme de Newton pour les matrices est défini par la relation :

$$X_{n+1} = X_n - [dF(X_n)]^{-1}[F(X_n)].$$

D'où, on obtient, en prenant $F\begin{pmatrix} s \\ p \end{pmatrix} = (s,p) \mapsto \begin{pmatrix} b_{n-1}(s,p) \\ b_n(s,p) \end{pmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} s^{(j+1)} \\ p^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{(j)} \\ p^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{\partial b_{n-1}(s^{(j)},p^{(j)})}{\partial s} & \frac{\partial b_{n-1}(s^{(j)},p^{(j)})}{\partial p} \\ \frac{\partial b_n(s^{(j)},p^{(j)})}{\partial s} & \frac{\partial b_n(s^{(j)},p^{(j)})}{\partial p} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1}(s^{(j)},p^{(j)}) \\ b_n(s^{(j)},p^{(j)}) \end{bmatrix}$$

c'est à dire :

$$\begin{bmatrix} s^{(j+1)} \\ p^{(j+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s^{(j)} \\ p^{(j)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_{n-1}^{(j)} & -\alpha_{n-2}^{(j)} \\ \alpha_n^{(j)} & -\alpha_{n-1}^{(j)} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_{n-1}^{(j)} \\ b_n^{(j)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} s^{(j+1)} \\ p^{(j+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^{(j)} \\ p^{(j)} \end{bmatrix}-\frac{1}{-(\alpha_{n-1}^{(j)})^2+\alpha_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}}\begin{bmatrix} -\alpha_{n-1}^{(j)} & \alpha_{n-2}^{(j)} \\ -\alpha_n^{(j)} & \alpha_{n-1}^{(j)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{n-1}^{(j)} \\ b_n^{(j)} \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{bmatrix} s^{(j+1)} \\ p^{(j+1)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} s^{(j)} \\ p^{(j)} \end{bmatrix}-\frac{1}{\alpha_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}-(\alpha_{n-1}^{(j)})^2}\begin{bmatrix} b_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}-b_{n-1}^{(j)}\alpha_{n-1}^{(j)} \\ b_n^{(j)}\alpha_{n-1}^{(j)}-b_{n-1}^{(j)}\alpha_n^{(j)} \end{bmatrix}$$

d'où :

$$\begin{cases} s^{(j+1)}=s^{(j)}+\dfrac{b_{n-1}^{(j)}\alpha_{n-1}^{(j)}-b_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}}{\alpha_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}-(\alpha_{n-1}^{(j)})^2} \\ \\ p^{(j+1)}=p^{(j)}+\dfrac{b_{n-1}^{(j)}\alpha_n^{(j)}-b_n^{(j)}\alpha_{n-1}^{(j)}}{\alpha_n^{(j)}\alpha_{n-2}^{(j)}-(\alpha_{n-1}^{(j)})^2} \end{cases}$$

- <u>Programmation de la méthode de Bairstow</u> :

Nous avons tout d'abord créé une procédure nous permettant de récupérer les coefficients du polynôme que nous prenons en entrée. Voici l'algorithme de celle-ci :

```
coefficient:=proc(poly,n)
local i;
global a;
for i from 0 to n do
    a[i]:=coeff(poly,x,n-i);
od;
end;
```

Ensuite, nous avons donc écrit l'algorithme suivant nous permettant d'extraire deux racines d'un polynôme :

```
bairstow:=proc(poly,s0,p0)
local n,k,x,delta,i,b,fini,alpha,s,p,epsilon;
global a;
epsilon:=10^(-3);
s[0]:=s0;
p[0]:=p0;
n:=degree(poly);
coefficient(poly,n);
alpha[0]:=0;
b[0]:=a[0];
alpha[1]:=b[0];
fini:=true;
k:=0;
while fini do
    b[1]:=evalf(a[1]+s[k]*b[0]);
    for i from 2 to n do
        b[i]:=(a[i]+s[k]*b[i-1]-p[k]*b[i-2]);
    od;
```

```
for i from 2 to n do
             alpha[i]:=(s[k]*alpha[i-1]+b[i-1]-p[k]*alpha[i-2]);
         od;

     if ((abs(b[n-1])<epsilon) and (abs(b[n])<epsilon)) or
(abs((alpha[n])*(alpha[n-2])-((alpha[n-1])^2))<epsilon) then
       delta:=s[k]^2-4*p[k];
       x[1]:=(s[k]+sqrt(delta))/2;
       x[2]:=(s[k]-sqrt(delta))/2;
       fini:=false;
    else            s[k+1]:=s[k]+((b[n-1])*(alpha[n-1])-
(b[n])*(alpha[n-2]))/((alpha[n])*(alpha[n-2])-((alpha[n-1])^2));
p[k+1]:=p[k]+((b[n-1])*(alpha[n])-(b[n])*(alpha[n-
1]))/((alpha[n])*(alpha[n-2])-((alpha[n-1])^2));
       k:=k+1;
    fi;
od;
print(evalf(x[1]),evalf(x[2]));
end;
```

Voici un exemple d'application de notre programme et le résultat obtenu :

```
poly:=expand((x-1)^3*(x- 25)*(x- 36)*(x-101));
bairstow(poly,45,3);
```

$$poly := x^6 - 165\,x^5 + 7550\,x^4 - 112570\,x^3 + 294045\,x^2 - 279761\,x + 90900$$

$$poly1 := x^3 - 9\,x - x^2 + 9$$

101.00000000.99815665

5.L'ensemble de Julia :

Considérons la fonction f : C* ⟶ C définie par $f(z) = \exp(1/z)$, pour tout $z \in$ C*, qui est indéfiniment dérivable sur C*.

L'algorithme de Newton induit par cette fonction est donné par :

$$z_{n+1} = z_n - f(z_n) / f'(z_n) = z_n - \exp(1/z_n) / [(-1/z_n^2) \exp(1/z_n)]$$
$$= z_n - [-(z_n)^2] = z_n + z_n^2 \Rightarrow \mathbf{z_{n+1} = z_n + z_n^2}$$

Notations :

On notera *M(z)* le point M d'affixe z.
On définit l'application $N : z \mapsto z + z^2$, donnée par l'algorithme de Newton (voir ci-dessus).
De plus, elle désigne la transformation qui au point M(z) associe le point M'(N(z)).
On notera *D(A,r)* le disque ouvert de centre A et de rayon r.

Définition :

On appelle ensemble de Julia l'ensemble construit à l'aide des itérées de la suite (z_n) donnée par l'application $f : z \mapsto z^2 + z$, où z est dans le plan complexe et avec

$$z_n = f \circ f \circ \ldots\ldots \circ f(z_0) = f^n(z_0).$$

L'itération de la suite s'écrit : $z_{n+1} = (z_n)^2 + z_n$ avec pour état initial (z_0) dans le plan complexe. L'ensemble de Julia J peut être aussi considéré comme la frontière de l'ensemble $\{z_0 / \forall n \geq 0,\ |z_n| < +\infty\}$.

En général, on a que $|z_n| \to +\infty$ quand n tend vers $+\infty$: la fuite des points vers l'infini est exponentielle (exp λ n), au voisinage immédiat de l'ensemble de Julia J.
Certains ensembles de Julia sont connexes, d'autres sont des nuages de points (ensembles de Cantor).

- Etude de la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de C :

On définit, par récurrence sur n, la suite $(M_n)_{n\geq 0}$ comme suit :

$$M_0 = A(a) \text{ et } M_{n+1} = N(M_n),\ \forall n \geq 0.$$

On se pose les problèmes suivants :

a) Si la suite (M_n) converge, quelle est sa limite ?
b) Si la suite (M_{2n}) converge, quelles sont les limites possibles de la suite (M_{2n}) ?
Etudions la convergence de la suite (M_{2n+1}) :

a) Si la suite converge (M_n) vers r, alors on a : $\lim z_n = r = \lim z_{n+1}$, lorsque n tend vers $+\infty$, donc $r = r + r^2$.
Par suite, r = 0 et la suite (M_n) converge vers le point O d'affixe 0.

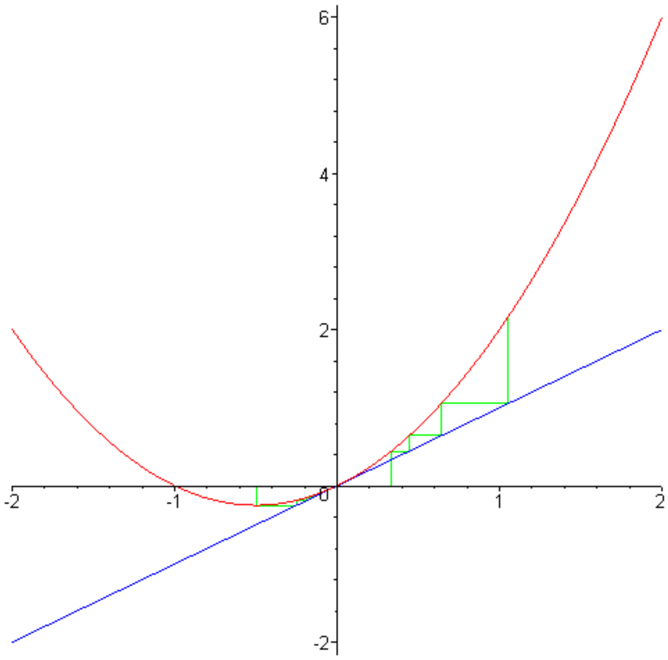
b) De même, si la suite (M_{2n}) converge vers r, alors $\lim z_{2n} = r = \lim z_{2n+2}$, lorsque n tend vers $+\infty$, donc $r^2(r^2 + 2r + 2) = 0$ et on obtient que $r \in \{0, -1+i, -(1+i)\}$. Ce qui implique que la suite (M_{2n}) converge vers les points O, L1(-1,1) ou L2(-1,-1).

Comme $M_{2n+1} = N(M_{2n})$ et comme N(L1) = L2, N(L2) = L1 et N(O) = O (c'est-à-dire que N(-1+i) = -1-i, N(-1-i) = -1+i et N(0) = 0), alors on obtient les implications suivantes :

- Si la suite (M_{2n}) converge vers le point O, alors la suite (M_{2n+1}) converge vers le point O, donc la suite (M_n) converge aussi vers le point O.
- Si la suite (M_{2n}) converge vers le point L1, alors la suite (M_{2n+1}) converge vers le point L2.
- Si la suite (M_{2n}) converge vers le point L2, alors la suite (M_{2n+1}) converge vers le point L1.

Soit a un nombre réel. Discutons la convergence de la suite (M_n) selon les valeurs de a :

Il s'agit d'étudier la suite réelle définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = g(u_n)$, où $g(x) = x + x^2$.



<u>Légende du graphe</u> :

- en rouge, la courbe Cg de la fonction g.
- en bleu, la droite $y = x$.
- en vert, les itérations de la suite (u_n) à partir des points $a = -1/2$ et $a' = 1/3$.

On remarque que $g(x) \geq x$, alors la suite (u_n) est toujours croissante, de limite 0 ou $+\infty$. Par conséquent, on obtient les résultats suivants :

- Si $a > 0$, alors $\lim u_n = +\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $a = 0$, alors $u_n = 0$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $-1 < a < 0$ (i.e. $-1 < x < 0$), on a que $g(a) = a(a+1) < 0$, donc la suite (u_n) est croissante et majorée par 0. Ce qui implique que $\lim u_n = 0$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $a = -1$, alors $u_n = 0$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $a < -1$, alors $u_1 > 1$ et $\lim u_n = +\infty$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Dans la suite, nous allons étudier plus précisément la suite (z_n), en montrant la convergence des suites qui la composent, car c'est une suite de nombres complexes.

On suppose que les suites (x_n) et $(|y_n|)$ convergent. Soient $\alpha = \lim x_n$ et $\beta = \lim |y_n|$, lorsque n tend vers $+\infty$.
Montrons qu'il y a deux valeurs possibles pour le couple (α, β).
Etablissons alors la convergence des suites (M_{2n}) et (M_{2n+1}) :

Tout d'abord, recherchons les expressions analytiques de l'application N :
Soient M(x, y) et M'(x', y'), alors on a :

$$M' = N(M) \Leftrightarrow x' + iy' = (x + iy) + (x + iy)^2 \Leftrightarrow x' + iy' = x + iy + x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = (x + x^2 - y^2) + i(y + 2xy) \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + x^2 - y^2 \\ y' = y + 2xy \end{cases}$$

D'où $\begin{cases} x_{n+1} = x_n + (x_n)^2 - (y_n)^2 \\ y_{n+1} = y_n(1 + 2x_n) \end{cases}$

Si $\alpha = \lim x_n$ et $\beta = \lim |y_n|$, lorsque n tend vers $+\infty$, on obtient que $\alpha = \alpha + \alpha^2 - \beta^2$ et que $\beta = \beta|1+2\alpha|$.

D'où $|\alpha| = \beta$ et $\beta(1 - |1+2\alpha|) = 0$. Ce qui nous donne les possibilités suivantes :
$(\alpha, \beta) = (0, 0)$ ou $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$.

- Si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$, alors la suite (M_n) converge vers le point O.
- Si $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ alors $\lim x_n=-1$ et $\lim|y_n|=1$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Par conséquent, $\lim(1+2x_n)=-1$ et $\lim \frac{y_{n+1}}{y_n}=-1$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Donc, pour n assez grand, y_n change alternativement de signe et on a :

- soit $\lim y_{2n} = 1$ et alors $\lim y_{2n+1} = -1$, lorsque n tend vers $+\infty$.
- soit $\lim y_{2n} = -1$ et alors $\lim y_{2n+1} = 1$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Ce qui nous donne que la suite (M_{2n}) converge vers le point L1 et la suite (M_{2n+1}) vers le point L2, ou bien inversement. Donc les suites (M_{2n}) et (M_{2n+1}) sont convergentes.

On suppose que la suite $(|z_n|)$ converge. Soit $\lambda = \lim |z_n|$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Montrons que $\lim |1+z_n| = 1$, lorsque n tend vers $+\infty$.

Déduisons-en la convergence des suites (x_n) et $(|y_n|)$. Quelles sont les valeurs possibles pour λ ?

- Si $\lambda=0$ alors $\lim|z_n|=0$ et $\lim z_n=0$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\lim |1+z_n|=1$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- Si $\lambda>1$, on peut écrire que $|z_{n+1}|=|z_n+(z_n)^2|=|z_n|.|1+z_n|$, d'où

$$\lim|1+z_n|=\lim \frac{z_{n+1}}{z_n}=\frac{\lambda}{\lambda}=1, \text{ lorsque n tend vers } +\infty.$$

Sachant que $|1+z_n|^2 - 1 = 2x_n + (x_n)^2 + (y_n)^2 = 2x_n + |z_n|^2$ et comme $\lim |1+z_n|^2 - 1 = 0$, lorsque n tend vers $+\infty$, alors on a que

$$\begin{cases} \lim x_n = \lim \frac{-|z_n|^2}{2} = \frac{-\lambda^2}{2} \\ \lim |y_n| = \lim \sqrt{-2x_n - (x_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 - \frac{\lambda^4}{4}} \end{cases}, \text{ lorsque n tend vers } +\infty.$$

Remarque :

Cette étude nous rappelle la question précédente, donc on a que :

- soit $\lambda=0$
- soit $\frac{-\lambda^2}{2}=-1$ donc $\lambda=\sqrt{2}$.

De plus, les longueurs OL1 et OL2 vérifient :

$\mathrm{OL1} = \mathrm{OL2} = \sqrt{2}$.

Résumé :

On a que la suite (M_n) converge vers le point O ou bien que le couple des limites des suites (M_{2n}) et (M_{2n+1}) appartient à l'ensemble des couples de points {(L1, L2),(L2, L1)}.

On suppose que la suite ($|z_n + 1/2|$) converge. Soit $\mu = \lim |z_n + 1/2|$, lorsque n tend vers $+\infty$.
Etudions la convergence de la suite ($|z_n + 1/4|$), puis celles des suites (x_n) et ($|y_n|$) .
Quelles sont les valeurs possibles de μ ?

Par hypothèse, on sait que $\mu = \lim |z_n + 1/2|$, lorsque n tend vers $+\infty$.   (*)
De plus, on a que z' + 1/4 = (z² + z) + 1/4 = (z + 1/2)²,
donc $\forall n \geq 1, |z_n + 1/4| = |z_{n-1} + 1/2|^2$ et $\lim |z_n + 1/4| = \mu^2$, lorsque n tend vers $+\infty$.   (**)
Si on remplace z_n par $x_n + iy_n$ dans les égalités (*) et (**), on obtient que :

$$\lim |x_n + iy_n + 1/2|^2 = \lim (x_n + (x_n)^2 + 1/4 + (y_n)^2) = \mu^2$$

et que $\lim |x_n + iy_n + 1/4|^2 = \lim \left((x_n)^2 + \frac{x_n}{2} + \frac{1}{16} + (y_n)^2\right) = \mu\text{^}4$, lorsque n tend vers $+\infty$.
Si on soustrait la deuxième limite à la première, on obtient que :

$\lim \left(\frac{x_n}{2} + \frac{3}{16}\right) = \mu^2 - \mu\text{^}4$, lorsque n tend vers $+\infty$, donc la suite (x_n) converge, ainsi que la suite ($(y_n)^2$) et alors la suite ($|y_n|$) converge également.

<u>Remarque :</u>

On retrouve encore la situation évoquée plus haut, donc on a que μ = IO = 1/2 ou μ = IL1 = IL2 = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ où I(-1/2) est le centre de la symétrie σ qui vérifie :
$N(P) = N(Q) \Leftrightarrow P = Q$ ou $P = \sigma(Q)$, pour tous P et Q dans le plan complexe. (N(z) = N(z') $\Leftrightarrow$ (z-z')(z + z' + 1) = 0 $\Leftrightarrow$ z' = z ou z' = -z – 1)

– <u>Description de l'ensemble de Julia</u> :

On note $\mathcal{J}$ l'ensemble des points A tels que la suite (M_n) converge vers le point O sans stationner (i.e. que le point M_n est toujours distinct du point O).
Nous allons étudier quelques propriétés de l'ensemble $\mathcal{J}$.

Montrons que $\mathcal{J}$ possède un centre de symétrie et deux axes de symétrie :

Rappelons que σ est une symétrie centrale de centre I(-1/2). Comme $N o \sigma = N$, les suites récurrentes qui ont pour premières itérations les points A et $\sigma(A)$, sont égales à partir du deuxième terme, donc on a que $\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$. Ce qui veut dire que l'ensemble $\mathcal{J}$ est invariant par la symétrie σ de centre I.

Comme $\overline{z^2} + \overline{z} = \overline{z^2 + z}$, on a $N o \sigma_x = \sigma_x o N$ que où σ_x est la symétrie orthogonale d'axe (Ox).
Par conséquent, deux suites récurrentes ayant leurs premières itérées symétriques par rapport à l'axe (Ox), restent symétriques l'une par rapport à l'autre, et leurs convergences sont simultanées. Donc l'ensemble $\mathcal{J}$ est symétrique par rapport à l'axe (Ox).

Comme $\mathcal{J}$ est déjà symétrique par rapport au point I, il est donc symétrique par rapport à l'axe (Iy).

Soient U le point d'affixe -1 et $\Delta = \{M(x, y) / -1 < x < 0 \text{ et } y^2 < x^2 + x + 1\}$.

Etablissons que $N(\Delta)$ est inclus dans le disque D(U, 1).
Déduisons-en que, lorsque $A \in \Delta$, la suite ($|z_n|$) est strictement décroissante.
Etablissons que l'ensemble $\mathcal{J}$ contient l'ensemble Δ.

Soit $V = \{M(x, y) / -1 < x < 0 \text{ et } x + y^2 < 0\}$, on a que $N(\Delta) = V$, car ……
Soit $M(x, y) \in V$, alors on a $-1 < x < 0$ et $y^2 < -x$, donc $x^2 + x < 0$. De plus, on a que :

$$UM^2 = (x + 1)^2 + y^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 < x^2 + x + 1 < 1,$$

d'où $N(\Delta) \subset D(U, 1)$.
On remarque que si $M(z) \in D(U, 1)$, alors $|z'| < |z|$ puisque $|z'| < |z||z+1|$.

De plus, si $A \in \Delta$, on a que $M_n \in D(U, 1)$, $\forall n \geq 1$, car $N(\Delta)$ est inclus dans $\Delta \cap D(U, 1)$, donc la suite ($|z_n|$) est strictement décroissante. Ce qui implique que la suite ($|z_n|$) est convergente, de limite $\sqrt{2}$ ou 0.
Enfin, on remarque que $\Delta \subset D(O, \sqrt{2})$, donc $|z_1| = OA < \sqrt{2}$, ce qui est absurde puisque la suite ($|z_n|$) décroît. D'où lim $|z_n| = 0$ quand n tend vers $+\infty$ et $A \in \mathcal{J}$, donc $\mathcal{J}$ contient Δ.

Si A n'est pas dans le disque $D(I, r_0)$, montrons que la suite ($\left|z_n + \frac{1}{2}\right|$) ne converge pas et que la suite (M_n) n'est pas bornée.

Prouvons que $\mathcal{J}$ est inclus dans le disque $D(I, r_0)$:
Tout d'abord, le rayon $r_0 > 0$ est défini de telle sorte que pour tout point M extérieur au disque $D(I, r_0)$, on ait IM' $\geq$ IM avec M' = N(M) : on trouve $r_0 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$.

Si IA r_0 alors IM $\geq$ IA, donc par récurrence sur n, $\forall n \geq 0$, $IM_{n+1} \geq IM_n$. Ce qui implique que la suite $(IM_n) = (\left|z_n + \frac{1}{2}\right|)$ ne converge pas.

En effet, si on suppose que la suite (IM_n) converge, alors sa limite serait égale à $\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, mais ces nombres sont strictement inférieurs à $r_0 = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$. Donc lim $\left|z_n + \dfrac{1}{2}\right| = +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et la suite est (IM_n) est croissante.
Comme $|z_n| \geq \left|z_n + \dfrac{1}{2}\right| - \dfrac{1}{2}$, alors lim $|z_n| = +\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et la suite () n'est pas bornée. Ce qui nous donne que : $A \in \mathcal{J} \Rightarrow$ la suite (M_n) converge vers le point O $\Rightarrow$ la suite (M_n) est bornée $\Rightarrow$ IA $< r_0$. D'où $\mathcal{J} \subset D(I, r_0)$.

Montrons que le point A est dans $\mathcal{J}$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $M_k \in \Delta$:

Montrons qu'il est impossible que l'on ait la propriété suivante :

Si A appartient à $\mathcal{J}$, alors x_n est positif, à partir d'un certain rang.

En effet, si $x \geq 0$ et si $z \neq 0$, alors on a : $\left|\frac{N(z)}{z}\right|^2 = |1+z|^2 = x^2 + y^2 + 2x + 1 > 1$ et

$|N(z)| > |z|$. Donc si $x_n \geq 0$ à partir du rang n_0, la suite ($|z_n|$) est croissante pour $n \geq n_0$ et on a $|z_{n0}| \neq 0$. Ce qui implique que $\lim z_n \neq 0$ quand n tend vers $+\infty$ et que $A \in \mathcal{J}$.
CONTRADICTION avec l'hypothèse !

D'autre part, $z_n \in D(O, \frac{1}{2})$ à partir d'un certain rang, donc il existe un entier k tel que $z_k \in D(O, \frac{1}{2})$ avec $x_k < 0$, alors $M_k \in \Delta$.
Réciproquement, s'il existe un entier k tel que $M_k \in \Delta$, alors la suite (M_{k+n}) converge vers le point O, car $\Delta \subset \mathcal{J}$, ainsi que la suite ($M_n$), donc $A \in \mathcal{J}$.

S'il existe un entier k tel que $M_n \notin D(I, r_0)$, que peut-on dire du point A ?

Il est clair que $N(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$ et par récurrence sur k, $\forall k \in \mathcal{N}$, $N^k(\mathcal{J}) \subset \mathcal{J}$, donc $A \in \mathcal{J} \Rightarrow M_k \in \mathcal{J}$, $\forall k \in \mathcal{N}$.Ce qui nous donne que :

$$[\exists k \in \mathcal{N} \text{ tel que } M_k \notin D(I, r_0)] \Rightarrow [\exists k \in \mathcal{N} \text{ tel que } M_k \notin \mathcal{J}] \Rightarrow A \notin \mathcal{J}.$$

En conséquence, on a :

- dès que le point M_k appartient à Δ, tous les autres points M_n avec $n \geq k$ sont aussi dans Δ et le point $A \in \mathcal{J}$.
- dès que le point M_k n'appartient plus au disque $D(I, \frac{1+\sqrt{2}}{2})$, les autres points M_n avec $n \geq k$ sont aussi à l'extérieur de ce disque et le point $A \notin \mathcal{J}$.

<u>Remarque</u> :

Rien n'empêche que le point M_k soit dans l'ensemble $D(I, \frac{1+\sqrt{2}}{2}) \setminus \Delta$, mais cette éventualité est peu probable !

– <u>Conclusion</u> :

Tout point de l'intérieur de l'ensemble $\mathcal{J}$, pris comme valeur initiale, induit une suite de Newton convergente alors que l'équation $\exp(\frac{1}{z}) = 0$ n'a visiblement pas de racines !!!