Partie I
Le cas scalaire

Introduction :

Nous allons étudier dans cette partie la méthode de Newton en dimension 1 c'est à dire dans le cas scalaire.
Pour cela nous aurons besoin de l'équation de la tangente :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) \qquad (1)$$

où a est le point où l'on désire calculer la tangente.

1. Méthode de Newton en dimension 1 :

Soit f(x) une fonction, f'(x) sa dérivée et soit x_0 une valeur initiale proche d'une racine de f.
Nous voulons calculer la tangente en x_0 donc l'équation (1) devient :

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

Résolvons cette équation en prenant

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = x_1 \end{cases}$$

On obtient :

$$0 = f'(x_0)(x_1-x_0) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x_0)(x_1-x_0) = -f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow x_1 - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

d'où

$$\boxed{x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

Maintenant nous allons chercher une meilleure approximation de x_1 (donc de x_0) en fonction de x_1, notée x_2.

De la même façon on considère l'équation de la tangente au point x_1 en prenant :

$$\begin{cases} y=0 \\ x=x_2 \end{cases}$$

On obtient alors :

$$0=f'(x_1)(x_2-x_1)+f(x_1)$$

d'où

$$\boxed{x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}}$$

Ensuite, nous répétons la méthode de Newton jusqu'à obtention de la meilleure approximation possible.
Nous allons essayer de représenter cette méthode comme une fonction itérative.
Soit $N_f(x)$ définie par :

$$N_f(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

Soit x_0 la valeur initiale de la méthode de Newton.
Alors d'après ce qui précède,

$$x_1 = N_f(x_0)$$
$$x_2 = N_f(x_1) = N_f(N_f(x_0)) = N_f^2(x_0).$$

D'où, en itérant jusqu'à x_n,

$$\boxed{x_n = N_f^n(x_0)}$$

On appelle $N_f(x)$ la fonction de Newton de f et on note $N_f(x) = N(x)$ (par souci de clarté).
Nous allons donner un exemple qui va nous permettre d'observer quelques problèmes de la méthode de Newton.

<u>Exemple</u> :

Soit $p(x) = x^3 - x$.
Alors $p(x) = x(x^2 - 1) = x(x + 1)(x - 1)$.
Les racines de p sont donc –1, 0 et 1.
Nous appliquer la méthode de Newton à p et faire quelques observations.
Pour cela, calculons N(x).

$$N(x) = x-\frac{p(x)}{p'(x)}$$

$$\Leftrightarrow N(x)=x-\frac{x^3-x}{3x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^3-x-x^3+x}{3x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x^3}{3x^2-1}$$

A l'aide d'un programme réalisé en Maple, nous allons calculer des itérations en changeant la valeur initiale.

<u>Programme Maple</u> :

```
restart:
f:=x->(x^3-x);
```

$$f := x \to x^3 - x$$

```
itere:=proc(u,k,f)
Cette procédure calcule les k itérés de la fonction de Newton.
global X;
local h,N,i;
X[0]:=u;
h:=diff(f(x),x);
N:=x-(f(x)/h(x));
for i from 1 to k+1 do
x:=X[i-1]:
X[i]:=N(X[i-1]):
print(X[i]);
od;
end;
```

En prenant 0.25 comme valeur initiale, on voit que la séquence converge rapidement vers 0 qui est la racine de p la plus proche de 0.25.

```
itere(0.25,2,f);
```

$$-0.0384615385$$

$$0.00011429877$$

$$-0.30\ 10^{-11}$$

De même, en prenant 0.75 comme valeur initiale, on voit que la séquence converge rapidement vers 1 qui est la racine de p la plus proche de 0.75.

```
itere(0.75,2,f);
```

$$1.227272727$$

$$1.050712646$$

$$1.003449909$$

Par contre, pour 0.45 comme valeur initiale, la séquence ne converge pas aussi rapidement et elle converge vers –1 qui est la racine de p la plus éloignée de 0.45.

```
itere(0.45,10,f);
```

-0.4643312102
0.5668990628
-10.15637824
-6.792869826
-4.561531968
-3.090531025
-2.134858361
-1.535544956
-1.192242580
-1.038317584
-1.002021756

De même, si 0.4472 est la valeur initiale, la séquence converge vers 0 alors que si 0.4572 est la valeur initiale, la séquence converge vers1.

itere(0.4472,7,f);	itere(0.4572,7,f);
-0.4471320319	-0.5125674933
0.4467245486	1.271477378
-0.4442913017	1.067822877
0.4301000253	1.005958429
-0.3575505864	1.000052524
0.1482957163	1.000000004
-0.0069832444	1.000000000
$0.681185\ 10^{-6}$	

Ces différents calculs de séquence nous montre l'importance du choix de la valeur initialeet la « fragilité » de la méthode de Newton.

De plus, si on prend $\frac{1}{\sqrt{3}}$ comme valeur initiale alors :

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{3} - 1} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{0}$$

qui n'est pas défini.

On ne peut donc pas définir x_1.

Une solution à ce problème est le théorème suivant.

Théorème :

Soit p(x) un polynôme. S'il est possible de simplifier N_p (x) (par des facteurs communs) alors N_p (x) est toujours définie pour x valant les racines de p(x).
Un point est un point fixe de N_p (x) si et seulement si il est racine du polynôme et tous les points fixes de N_p (x) sont attractifs.

Preuve :

Soit p(x) un polynôme et soit a une racine de p c'est à dire p(a) = 0.
Alors il existe $n \in \aleph$ et q(x) un polynôme tels que :

$$p(x) = (x-a)^n q(x) \qquad \text{où } q(a) \neq 0 \text{ et n est la multiplicité de a.}$$

On a :

$$N_p(x) = x - \frac{p(x)}{p'(x)}$$

$$\Leftrightarrow \; N_p(x) = x - \frac{(x-a)^n q'x)}{n(x-a)^{n-1} q(x) + (x-a)^n q'(x)}$$

$$\Leftrightarrow \; N_p(x) = x - \frac{(x-a)^n q(x)}{(x-a)^{n-1}(nq(x) + (x-a)q'(x))}$$

$$\Leftrightarrow \; N_p(x) = x - \frac{(x-a)q(x)}{nq(x) + (x-a)q'(x)}$$

d'où $N_p(a) = a - \dfrac{(a-a)q(a)}{nq(a) + (a-a)q'(a)}$

$$\Leftrightarrow \; N_p(a) = a - \frac{0}{nq(a)} = a$$

$N_p(a)$ est définie car $q(a) \neq 0$ par hypothèse.
D'où si nous pouvons simplifier $N_p(x)$, $N_p(x)$ est définie en la racine et admet un point fixe.
De plus, si $N_p(a)$ = a alors :

$$a - \frac{p(a)}{p'(a)} = a$$

c'est à dire $\dfrac{p(a)}{p'(a)} = 0$.
Or p(a) = 0.
Donc les points fixes de N_p sont les racines de p.

De plus,

$$N'_p = 1 - \frac{p'(x)p'(x) - p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \; N'_p(x) = 1 - \frac{(p'(x))^2 - p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \; N'_p(x) = 1 - 1 + \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}$$

$$\Leftrightarrow \; N'_p(x) = \frac{p(x)p''(x)}{(p'(x))^2}$$

D'où, si p'(a) $\neq 0$,

$$N'_p(a) = \frac{p(a)p''(a)}{(p'(a))^2} = 0 \quad \text{car } p(a)=0.$$

Donc si a est racine de p et p'(a) $\neq 0$ alors,

$$N_p(a) = a \text{ et } |N'_p(a)| = 0 < 1.$$

D'où a est un point fixe attractif de p.

2. Programmation de la méthode de Newton :

Nous avons tout d'abord créé une procédure calculant les itérés de la méthode de Newton dont voici l'algorithme :

```
f:=x->(x^2+1);
g:=x->(x^2-1);
itere:=proc(u,k,f)
global X;
local h,N,i;
X[0]:=u;
h:=diff(f(x),x);
N:=x-(f(x)/h(x));
for i from 1 to k+1 do
x:=X[i-1]:
X[i]:=N(X[i-1]):
od;
end;
```

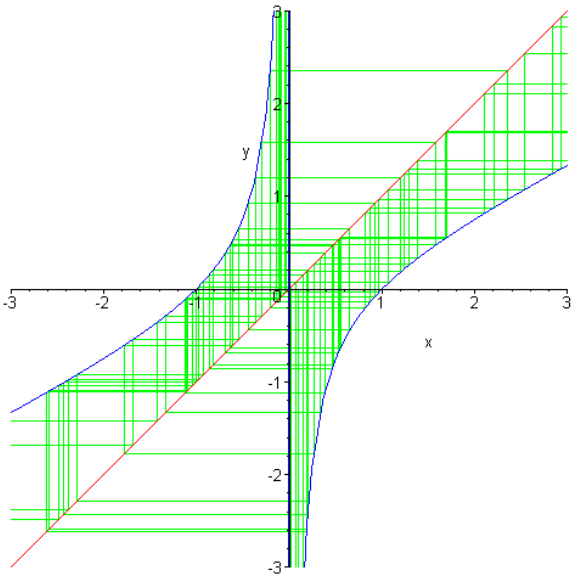
Nous avons ensuite programmé une procédure permettant de dessiner l'algorithme de Newton :

```
dessin:=proc(u,k,f)
local x,h,N,g,pt,o,c0,L,i,c1,c2;
h:=diff(f(x),x);
N:=x-(f(x)/h(x));
```

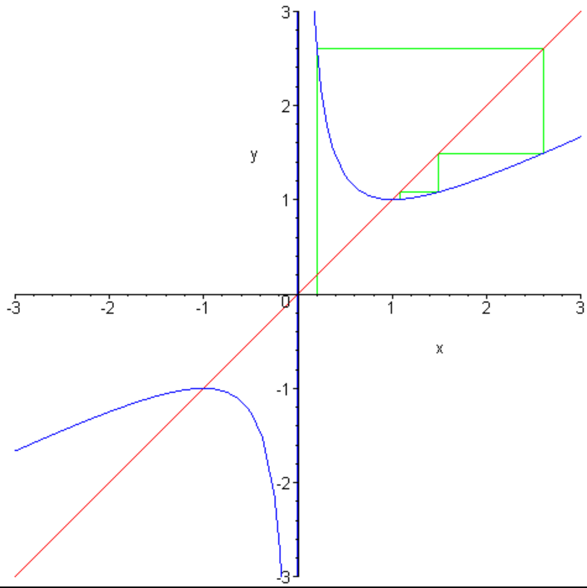
```
g:=x->x;
itere(u,k,f):
pt:=plot(N,x=-3..3,y=-3..3,color=blue);
o:=plot(g(x),x=-3..3,y=-3..3,color=red);
c0:=plot([X[0],t,t=X[1]..0],x=-3..3,y=-3..3,color=green);
L:=[pt,o,c0];
for i from 1 to k do
c1[i]:=plot([t,X[i],t=X[i]..X[i-1]],x=-3..3,y=-3..3,color=green);
c2[i]:=plot([X[i],t,t=X[i+1]..X[i]],x=-3..3,y=-3..3,color=green);
L:=[op(L),c1[i],c2[i]];
od;
with(plots):display(L);
end;
```

Voici les dessins obtenus pour différentes fonctions :

```
dessin(0.1,100,f);
```




```
dessin(0.2,5,g);
```



Nous avons ensuite écrit une procédure qui calcule les différences successives entre deux itérés et qui renvoie les dix dernières différences. Voici l'algorithme :

```
Erreur:=proc(u,k,f,affiche)
X[0]:=u;
h:=diff(f(x),x);
N:=x-(f(x)/h(x));
for i from 1 to k do
x:=X[i-1]:
X[i]:=N(X[i-1]):
od;
if affiche<>0 then
for i from (k-9) to k do
print(X[i]-X[i-1]);
od;
fi;
end;
```

Voici les résultats obtenus avec les mêmes fonctions que ci dessus :

```
Erreur(0.1,100,f,1);
                    3.767419676
                    1.953794142
                    1.137130145
                    1.194286152
                   -1.092242932
                    1.357800257
                   -1.003616859
                    5.916062950
                   -3.001216952
                   -1.591554993
> Erreur(0.2,10,g,1);
                    2.400000000
                   -1.107692308
                   -0.411102300
                   -0.078155872
                   -0.003044885
                    -0.463510^-5
                        0.
                        0.
                        0.
                        0.
```

3.Le cas x^2+1 :

Nous allons voir maintenant le méthode de Newton pour la fonction :

$$p(x) = x^2+1.$$

Il est clair que p(x) n'a pas de racines réelles et comme seuls les points fixes attractifs de N sont racines de p, on suppose qu'il va se passer quelque chose de différent.
Si $p(x) = x^2+1$, on a :

$$N(x)=x-\frac{p(x)}{p'(x)}$$
$$\Leftrightarrow N(x)=x-\frac{x^2+1}{2x}$$
$$\Leftrightarrow N(x)=\frac{2x^2-x^2-1}{2x}$$
$$\Leftrightarrow N(x)=\frac{x^2-1}{2x}.$$

Pour avoir une idée de ce qu'il va se passer pour cette fonction, nous avons tracé le graphe (voir ci dessus schéma 1) de la méthode de Newton avec 0.1 comme valeur initiale et en l'itérant 100 fois.
D'après notre graphe, nous pouvions supposer que cette fonction était peut être chaotique.

Définition :

Une fonction $f:D\to D$ est chaotique si :

- f dépend sensiblement des conditions initiales c'est à dire

$$\exists\delta>0 \ tel\ que\ \forall x\in D,\forall\varepsilon>0,\exists y\in D\ et\ n\in\aleph\ tel\ que\ |x-y|<\varepsilon\ et\ \left|f^n(x)-f^n(y)\right|>\delta$$

- f est topologiquement transitive c'est à dire

$$\forall x,y\in D,\forall\varepsilon>0,\exists z\in D\ tel\ que\ |z-x|<\varepsilon\ et\ \left|f^n(x)-y\right|<\varepsilon\ \forall n\in\aleph$$

- l'ensemble des points périodiques de f est dense dans D.

Notations :

Le cercle unité sera noté S^1.
Les angles seront mesurés en radians dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (qui sera considéré comme le sens positif) avec le point initial sur l'axe des abscisses $[0,+\infty[$.
On définit l'application du cercle de la façon suivante :

$$\begin{aligned} f:S^1&\to S^1 \\ \theta&\mapsto 2\theta \end{aligned}.$$

Nous allons prouver que N est chaotique en montrant que N est liée à l'application du cercle définie ci dessus.

Montrons que f est chaotique sur S^1.

Preuve :

- Comme nous pouvons le voir, la distance angulaire entre deux points est doublée à chaque itération de f.

On peut donc en déduire que f est sensible aux conditions initiales.

- La transitivité topologique résulte du fait que chaque petit arc de S^1 peut être étendu au cercle tout entier par un certain f^k et en particulier, en n'importe quel autre arc de S^1.

- Nous savons que $f(\theta+2\pi)=f(\theta)$.

De plus, on a $f^n(\theta)=2^n.\theta$.

Donc , θ est un point périodique de période n si et seulement si

$$2^n.\theta=\theta+k\pi \text{ (car tout point de } S^1 \text{ est de la forme } \theta+k\pi \text{)}$$

$$\Leftrightarrow (2^n-1)\theta=k\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{k\pi}{2^n-1} \text{ où } \theta\leq k\leq 2^n, k\in \aleph .$$

D'où les points périodiques de f de période n sont les $(2^n-1)^{\text{ième}}$ racines de l'unité.

Il en résulte que l'ensemble des points périodiques de f est dense dans S^1.

Soit $\begin{array}{l}\Phi: S^1-\{0\}\to\Re \\ x\mapsto \cot an(\frac{x}{2})\end{array}$.

Cette application satisfait $N\circ\Phi=\Phi\circ f$.

En effet, $N\circ\Phi(x)=\dfrac{(\cot an(\frac{x}{2}))^2-1}{2\cot an(\frac{x}{2})}$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\frac{\dfrac{(\cos(\frac{x}{2}))^2}{(\sin(\frac{x}{2}))^2}-1}{2\times\dfrac{\cos(\frac{x}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}}$$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\frac{(\cos(\frac{x}{2}))^2-(\sin(\frac{x}{2}))^2}{2\cos(\frac{x}{2})\sin(\frac{x}{2})}$$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\frac{(\cos(\frac{x}{2}))^2-(\sin(\frac{x}{2}))^2}{\sin(x)} \text{ car } \sin(2x)=2\cos(x)\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\frac{\cos(x)}{\sin(x)} \text{ car } \cos(2x)=(\cos(x))^2-(\sin(x))^2$$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\cot an(x)$$

$$\Leftrightarrow N\circ\Phi(x)=\Phi\circ f(x) .$$

Nous pouvons voir que $\cot an(\frac{x}{2})$ est continue bijective de $S^1-\{0\}$ dans $\Re$.

Remarquons que $(\Phi\circ f)(\pi)=\Phi(2\pi)=\Phi(0)$ qui n'est pas défini.

De plus, $(N\circ\Phi)(\pi)=N(\cot an\frac{\pi}{2})=N(0)$ qui n'est pas défini étant donné que f'(0)=0.

On a aussi :

$f^2(\frac{\pi}{2})=f(\pi)=2\pi=0 \; et \; f^2(\frac{3\pi}{2})=f(3\pi)=6\pi=0$.

D'où $\Phi \circ f^2$ n'est pas défini en $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$.

D'autre part, $N^2 \circ \Phi(\frac{\pi}{2}) = N(N \circ \Phi)(\frac{\pi}{2})$

$$\Leftrightarrow N^2 \circ \Phi(\frac{\pi}{2}) = N(\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2}})$$

$$\Leftrightarrow N^2 \circ \Phi(\frac{\pi}{2}) = N(0)$$

et $$N^2 \circ \Phi(\frac{3\pi}{2}) = N(N \circ \Phi)(\frac{3\pi}{2})$$

$$\Leftrightarrow N^2 \circ \Phi(\frac{3\pi}{2}) = N(\frac{\cos\frac{3\pi}{2}}{\sin\frac{3\pi}{2}})$$

$$\Leftrightarrow N^2 \circ \Phi(\frac{3\pi}{2}) = N(0).$$

D'où $N^2 \circ \Phi(\frac{\pi}{2})$ et $N^2 \circ \Phi(\frac{3\pi}{2})$ ne sont pas définis.

En itérant ce procédé, nous pouvons voir que r_n est un point de S^1 pour lequel $f(r_n)=0$ et $\Phi \circ f^n(r_n)$ n'est pas défini si et seulement si $N^n \circ \Phi(r_n)$ n'est pas défini.

Donc, si γ est un point de S^1 tel que $f^n(\gamma) \neq 0 \ \forall n \in \aleph$.

Il reste donc à montrer que l'ensemble des points périodiques de N est dense dans $\Re$, que N est topologiquement transitive sur R pour démontrer que N est chaotique sur $\Re$.

Soit [a,b] un intervalle de R.

Alors :

$\Phi^{-1}([a,b]) = [\alpha, \beta]$ où $[\alpha, \beta] \subset S^1$.

Donc, il existe $\gamma \in [\alpha, \beta]$ *et* $k \in \aleph$ tel que

$$f^k(\gamma) = \gamma.$$

Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que

$$f^n(\gamma) \neq 0 \ \forall n \in \aleph.$$

Donc, si $c = \Phi(\gamma)$ alors $c \in [a,b]$ et

$$N^k(c) = N^k(\Phi(\gamma)) = \Phi \circ f^k(\gamma) = \Phi(\gamma) = c.$$

D'où, c est un point périodique de N dans [a,b] et l'ensemble des points périodiques de N est dense dans $\Re$.

De plus, il existe $m \in \aleph$ tel que $f^m([\alpha, \beta]) = S^1$.

Cela prouve que $N^m([a,b]) = \Re$.

D'autre part, si [d,e] est un autre intervalle de $\Re$, alors il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $N^m(x_0) \in [d,e]$ donc N est topologiquement transitive.